ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

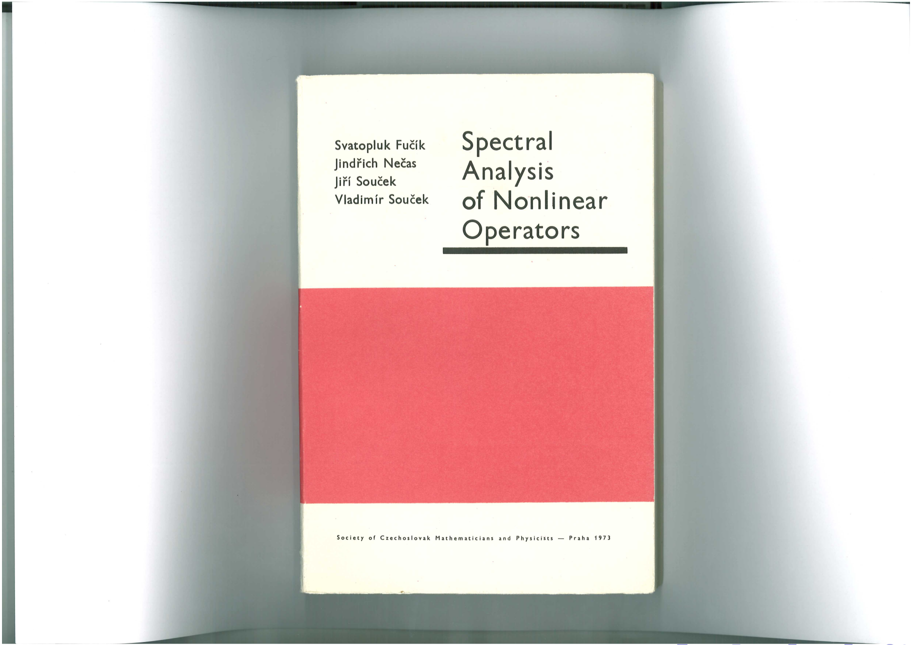
www.KMA.zcu.cz
SINCE 1954

Eigenvalue problems for nonlinear homogeneous operators: past, present and future

Pavel Drábek

Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd
Západočeská Univerzita v Plzni

Workshop "Nonlinear PDE's", to commemorate the work of Jindřich Nečas, Praha, December 13 - 15, 2009


Svatopluk Fučík
Jindřich Nečas
Jiří Souček
Vladimír Souček
Spectral Analysis of Nonlinear Operators
Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists — Praha 1973

NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEM

$$J(u) - \lambda S(u) = 0$$

$J, S : X \longrightarrow Y$ homogeneous

λ eigenvalue : $\exists\, u \neq 0$ solution

HOW MANY EIGENVALUES ?

HOW MANY EIGENFUNCTIONS ?

EXISTENCE

$$f : X \to \mathbb{R} \quad , \quad \langle f'(u), v \rangle = \langle J(u), v \rangle$$

$$g : X \to \mathbb{R} \quad , \quad \langle g'(u), v \rangle = \langle S(u), v \rangle$$

$$f'(u) - \lambda g'(u) = \sigma$$

Lagrange multiplier method :

CRITICAL POINTS OF f SUBJECT TO

$$\{u : g(u) = 1\}$$

TYPICAL EXAMPLE:

$$f : W_0^{1,p}(0,1) \to \mathbb{R} \qquad f(u) = \int_0^1 |u'|^p dx$$

$$g : W_0^{1,p}(0,1) \to \mathbb{R} \qquad g(u) = \int_0^1 |u|^p dx$$

$$f'(u) - \lambda g'(u) = 0$$

$$\begin{cases} -\left(|u'|^{p-2}u'\right)' - \lambda |u|^{p-2}u = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

DIFFERENT APPROACHES TO GET:

$\exists \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ CRITICAL LEVELS OF f SUBJECT TO $\{u : g(u) = 1\}$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \quad \longrightarrow +\infty$$

Basic problems:

1. What "does it mean" $\lambda_n = \lambda_{n+1}$?
2. Are there other eigenvalues λ which are different from λ_i's ?

добно (22), (25а) выражаются в рядах Гойна (Аппеля) и функциях Уиттекера первого и второго рода. С помощью (4), (9) (10), (33) сводятся к интегральным уравнениям и эффективно решается ряд краевых задач для (1), (32) в замкнутых и открытых областях, а также исследуются спектральные свойства оператора B в таких областях. Рассмотрим, например, в гипероктанте Ω области $D_1\{0 \leqslant r \leqslant R\}$, $D_2\{R \leqslant r < \infty\}$, $D_3\{R \leqslant r \leqslant R_1\}$ $(D_1 + D_2 = \Omega)$, ограниченные частями $S_R\{r = R, x_k \geqslant 0\}$, $S_{R_1}\{r = R_1, x_k \geqslant 0\}$ гиперсфер $r = R$, $r = R_1$ и плоскостями $x_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Обозначим через $Q_s^{(i)}(r, \rho)$ $(i = 1, 2, 3)$ функции Грина оператора $L_{k,2}$ (см. (14), $k = \mu + 2s$) на интервалах $0 \leqslant r \leqslant R$, $R \leqslant r < \infty$, $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, т. е. интегралы неоднородного уравнения $L_{k,2}[Q_s^{(i)}] = -\omega_N^{-1} r^{1-N} \delta(r - \rho)$, ($k = \mu + 2s$, $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака), обладающие нулевыми граничными данными при $r = R$, $r = R_1$ и $r = \infty$. Заменяя в (33) $\Lambda_s(r, \rho)$ подходящими радиальными функциями влияния $Q_s^{(i)}(r, \rho)$, получим соответствующие функции Грина первой, второй и третьей краевой проблемы в областях D_i $(i = 1, 2, 3)$ для операторов (1), (21), (27), (29). Пусть, например, $u_i(r, \theta) \in C^2(D_i)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют в D_i уравнению $B[u_i] = 0$ и граничным условиям

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_R} + (-1)^i \frac{h}{r} u_i = f(x) \in C^2(S_R),\ x \in S_R;\ \lim_{x_k \to 0} x_k^{a_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0,$$

где $h = \mathrm{const} \geqslant 0$; $k = 1, \ldots, n$, а n_R — внутренняя нормаль к S_R. Тогда, опираясь на (33) $(b = 0,\ m = 1)$ находим для $u_i(r, \theta)$ интегральные формы вида (10):

$$u_1 = -R \int_0^1 w(rt, \theta)\, t^{h-1} dt, \quad u_2 = R \int_1^\infty w(rt, \theta)\, t^{-h-1} dt,$$

$$w(r, \theta) = (R^2 - r^2) R^{-1} \int_{S_R} f(\xi) \prod_{i=1}^n \xi_i^{a_i} P(x, \xi)\, dS_R(\xi), \tag{34}$$

$$P = \delta r_1^{-N} F_A(N/2, \beta_1, \ldots, \beta_n; a_1, \ldots, a_n; -4x_1\xi_1/r_1^2, \ldots, -4x_n\xi_n/r_1^2),$$

$$\delta \prod_{i=1}^n \Gamma(\nu_i) = 2^{n-1}\Gamma(N/2), \quad r_1^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2.$$

При этом $B[w] = 0$, $w(R, \theta) = f(x)$, $\lim_{x_k \to 0} x_k^{a_k} w_{x_k} = 0$. Радиальные представления вида (33) для ядра Пуассона $P(x, \xi)$ из (34) дают возможность обобщить на случай оператора B известное разложение в ряды Лапласа по сферическим гармоникам функций, заданных на гиперсфере $r = 1$ (см. ([2]), т. 2, стр. 235), а также (путем предельного перехода в подобных рядах Лапласа) построить аналог известных кратных интегральных трансформаций Неймана и Мелера.

8. Сходные с (4), (9), (10), (33) результаты получаются в других ортогональных системах координат (цилиндрических, конических, сфероидальных, параболоидальных, бисферических, тороидальных), в которых уравнения (1), (21), (27), (29), (32) допускают полное или R-разделение переменных. Здесь разложения вида (33) для $U_n^m(x, \xi)$ позволяют построить функции Грина и интегральные представления решений внутренних и внешних сингулярных проблем Дирихле, Неймана, Робэна в областях, ограниченных координатными поверхностями и плоскостями вырождения уравнений (1), (32).

Московский вечерний металлургический институт

Поступило 14 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

МАТЕМАТИКА

ИНДРЖИХ НЕЧАС (JINDŘICH NEČAS)

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 VI 1971)

1. С появлением ряда работ об альтернативе Фредгольма для нелинейных операторов (см. ([1–5])) фундаментальным стал вопрос о структуре спектра. Теория категории множества Люстерника — Шнирельмана дает существование счетного множества собственных значений для потенциальных операторов (см. ([6])).

В этой работе доказывается, что нормированные собственные элементы нелинейного, но однородного уравнения Штурма — Лиувилля изолированные, из чего немедленно следует, что спектр дискретный.

2. Символом W_n^1 будем обозначать пространство Соболева действительных, абсолютно непрерывных функций на замкнутом интервале $\langle 0, 1\rangle$ с производными, принадлежащими пространству L_p, и с нормой

$$\|u\|_{1,p} \equiv \left(\int_0^1 (|u'|^p + |u|^p)\, dx\right)^{1/p};$$

$$V_1 \equiv \{u \in W_p^{(1)} / u(0) = u(1) = 0\} \equiv \mathring{W}_p^{(1)}, \quad V_2 \equiv \{u \in W_p^{(1)} / u(0) = 0\},$$

$$V_3 \equiv \{u \in W_p^{(1)} / u(1) = 0\}, \quad V_4 \equiv W_p^{(1)}.$$

Символом $C^{(i),\varkappa}$ будем обозначать пространства Шаудера непрерывных функций на $\langle 0, 1\rangle$ с производными вплоть до порядка i, непрерывными по Гёльдеру с показателем $\varkappa$. Норма означается $\|u\|^{i,\varkappa}$. Полагаем $C^{(i),0} = C^{(i)}$.

Пусть определены $a \in C^{(1)}$, $a(x) > 0$, $b \in C^{(0)}$, $b(x) \geqslant 0$, $c \in C^{(0)}$, $c(x) > 0$ и постоянные $A_0 \geqslant 0$, $A_1 \geqslant 0$. В дальнейшем всегда $p \geqslant 2$.

Функция $u \in V_i$ является собственным элементом и λ — соответствующим собственным числом нелинейного уравнения Штрума — Лиувилля $-(a|u'|^{p-2}u')' + (b - \lambda c)|u|^{p-2}u = 0$, если для всякого $v \in V_i$

$$\int_0^1 (a|u'|^{p-2}u'v' + (v - \lambda c)|u|^{p-2}uv)\, dx + A_0|u(0)|^{p-2}u(0)v(0) + A_1|u(1)|^{p-2}u(1)v(1) = 0. \tag{1}$$

В случае V_4 предполагается $A_0 + A_1 > 0$.

Из (1) немедленно следует, что наименьшее собственное число $\lambda_1 > 0$. В дальнейшем предполагается

$$\lambda_1 c(x) - b(x) > 0. \tag{2}$$

Теорема. *У нелинейного уравнения Штурма — Лиувилля точно счетное множество собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, причем $\lim_{n\to\infty} \lambda_m = \infty$.*

Множество нормированных собственных элементов изолированное. Всякому собственному числу соответствует конечное множество нормированных собственных элементов, которое с каждым своим элементом и содержит u $(-u)$.

Замечание 1. Существование счетного числа собственных значений Λ_K, для которых $\Lambda_K \to \infty$, доказывается, например, в ([6]). Надо только заметить, что $W_p^{(1)}$ и рассматриваемые подпространства являются пространствами с базисом Шаудера, который немедленно можно построить, исходя из базиса в L_p.

Замечание 2. Если рассматривать пространство $\mathring{W}_p^{(1)}$ как полу-

Travaux cités

[1] J. NEČAS: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Praha, Academia 1967.

[2] F. BUZZETTI: Sull'equazione della corda vibrante con termine dissipativo monotono crescente, Rendiconti, Istituto Lombardo, A102(1968), 225-235.

[3] G. PROUSE: Soluzioni periodiche dell'equazione delle ondo non omogenea con termine dissipativo quadratico, Richerche di matematica, XIII(1964), 261-280.

Matematický ústav ČSAV
Žitná 25, Praha 1
Československo

(Oblatum 26.2.1971)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

12,4 (1971)

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Александер КРАТОХВИЛ, Индржих НЕЧАС, Прага

В работе [1] И. Нечас установил дискретность спектра первой краевой задачи для нелинейного оператора Штурма - Лиувилля (Ш.Л.) второго порядка. Аналогичная задача для линейного оператора Ш.Л. четвертого порядка была решена Янчевским [3]. Целью настоящей работы является изучение спектра и собственных функций однородной первой краевой задачи для нелинейного оператора Ш.Л. четвертого порядка.

Пусть $C^{(k),\mu}$ пространство Шаудера функций на отрезке $[0, 1]$, имеющих непрерывные по Гельдеру с показателем μ производные до порядка k. Норму в этом пространстве будем обозначать $\| u \|_{(k),\mu}$. В случае $\mu = 0$ в место $C^{(k),0}$ будем писать $C^{(k)}$. Кроме того обозначим через $\| u \|_{2,p}$ норму в пространстве Соболева $W_p^{(2)}(0,1)$, т.е.

$$\| u \|_{2,p} = \{ \int_0^1 (|u''|^p + |u'|^p + |u|^p)\, dx \}^{\frac{1}{p}}$$

и

$$\mathring{W}_p^{(2)} = \{ u \in W_p^{(2)};\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \} .$$

AMS: Primary 47H15, 47H99 Ref. Ž. 7.978.5

FUČÍK, NEČAS, SOUČEK, SOUČEK:

J, S "REAL ANALYTIC" $\Longrightarrow$

THE SET OF ALL EIGENVALUES IS AT MOST COUNTABLE

(Chpt. V: THE CONVERSE OF LJUSTERNIK-SCHNIRELMANN THEORY)

$$\Delta_p u \overset{\text{def}}{=} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \lambda |u|^{p-2}u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\lambda_n = \inf_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_n} \sup_{u\in\mathcal{A}} \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx$$

$$\mathcal{A} \subset \left\{u : \int_\Omega |u|^p dx = 1\right\} = \mathcal{S}$$

$\mathcal{F}_n$ "suitable" family of sets

Deformation lemma combined with compactness condition (Palais - Smale condition)

$\Longrightarrow$ λ_n is critical level and hence the eigenvalue

Different choices for $\mathcal{F}_n$:

Most common choice for $\mathcal{F}_n$ is

$$\mathcal{F}_n = \{ A \subset \mathcal{S} : \gamma(A) \geq n, \ A \text{ symmetric} \}$$

Krasnoselskij genus of A

$\gamma(A) \overset{\text{def}}{=} \inf\{m \in \mathbb{N} : \exists \text{ cont. odd } f : A \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}\}$

"Typical" example of A with $\gamma(A) = n$:

$A = h(S^{n-1})$, S^{n-1} unite sphere in $\mathbb{R}^n$
h odd homeomorphism

VARIATIONAL EIGENVALUES:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \longrightarrow +\infty$$

λ_1 SIMPLE, POSITIVE EIGENFUNCTION

λ_2 EIGENFUNCTION CHANGES SIGN <u>ONCE</u>

NO EIGENVALUES IN (λ_1, λ_2)

1D: $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ EXHAUSTS ALL EIGENVALUES OF

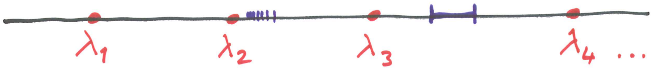
$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' - \lambda |u|^{p-2}u = 0, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

HIGHER DIMENSION: THE SAME IF $p=2$

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

OPEN PROBLEM: ARE THERE OTHER EIGENVALUES ("NONVARIATIONAL") WHICH ARE DIFFERENT FROM VARIATIONAL ONES $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$?

OTHER OPEN PROBLEMS :



1. WHAT IS THE STRUCTURE OF THE SET OF POSSIBLE NONVARIATIONAL EIGENVALUES?
2. IS THERE AN EIGENFUNCTION WHICH VANISHES ON AN OPEN SET (SET OF POSITIVE MEASURE) IN Ω ?
   (UNIQUE CONTINUATION PROPERTY)
3. HOW TO DEFINE MULTIPLICITY

. . . . .

? ∃ NONVARIATIONAL EIGENVALUES ?

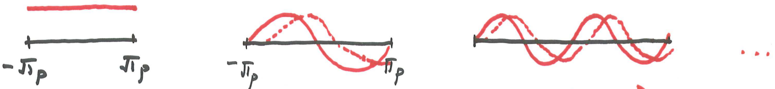
PROBLEM IN 1D WHICH SHARES SOME HIGHER DIMENSIONAL FEATURES $\longrightarrow$

ODE + PERIODIC CONDITIONS

$$(*) \begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda |u|^{p-2}u & \text{in } \mathbb{R}, \\ u \text{ is } 2\pi_p \text{ periodic} \end{cases}$$

$$\lambda_k = \inf_{A \in \mathcal{F}_{k+1}} \sup_{u \in A} \int_{-\pi_p}^{\pi_p} |u'(x)|^p \, dx \quad , k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < \ldots \to \infty$$



Const. $\qquad$ $\sin_p(x+\tau)$, $\tau \ldots$ shift $\qquad$ $\sin_p(2x+\tau)$

ALL EIGENVALUES OF (*)

BINDING, RYNNE CONSTRUCTED POTENTIAL q SUCH THAT THE ABOVE IS FALSE FOR

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' + \varepsilon q(x)|u|^{p-2}u = \mu |u|^{p-2}u \\ u \text{ is } 2\pi_p\text{-periodic} \end{cases}$$

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
J. Differential Equations 235 (2007) 199–218
Journal of Differential Equations
www.elsevier.com/locate/jde

The spectrum of the periodic p-Laplacian

Paul A. Binding [a,*], Bryan P. Rynne [b]

[a] Department of Mathematics and Statistics, University of Calgary, Calgary, AB T2N 1N4, Canada
[b] Department of Mathematics, Heriot-Watt University, Edinburgh EH14 4AS, Scotland, UK

Received 3 April 2006; revised 22 June 2006
Available online 17 January 2007

Abstract

We consider one-dimensional p-Laplacian eigenvalue problems of the form

$$-\Delta_p u = (\lambda - q)|u|^{p-1} \operatorname{sgn} u, \quad \text{on } (0, b),$$

together with periodic or separated boundary conditions, where $p > 1$, Δ_p is the p-Laplacian, $q \in C^1[0, b]$, and $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

It will be shown that when $p \neq 2$, the structure of the spectrum in the general periodic case (that is, with $q \neq 0$ and periodic boundary conditions), can be completely different from those of the following known cases: (i) the general periodic case with $p = 2$, (ii) the periodic case with $p \neq 2$ and $q = 0$, and (iii) the general separated case with any $p > 1$.

1. Introduction

Eigenvalue problems involving the one-dimensional p-Laplacian Δ_p have been investigated for many years. When $p = 2$ the classical Sturm–Liouville operator is involved, but for $p \neq 2$ one can already find modified variational and Prüfer methods in [9] (with references to earlier work) and [8], respectively. Despite a considerable amount of activity since, significant questions still remain concerning the nature of the spectrum (which can be defined in different ways) for various boundary conditions.

* Corresponding author.
E-mail addresses: binding@ucalgary.ca (P.A. Binding), bryan@ma.hw.ac.uk (B.P. Rynne).

0022-0396/$ – see front matter © 2006 Published by Elsevier Inc.
doi:10.1016/j.jde.2006.11.019

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
J. Differential Equations 244 (2008) 24–39
Journal of Differential Equations
www.elsevier.com/locate/jde

Variational and non-variational eigenvalues of the p-Laplacian

Paul A. Binding [a], Bryan P. Rynne [b,*]

[a] Department of Mathematics and Statistics, University of Calgary, Calgary AB T2N 1N4, Canada
[b] Department of Mathematics, Heriot–Watt University, Edinburgh EH14 4AS, Scotland, UK

Received 21 May 2006; revised 29 June 2007

Abstract

It is well known that all the eigenvalues of the linear eigenvalue problem

$$\Delta u = (q - \lambda r)u, \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

can (under appropriate conditions on q, r and Ω) be characterized by minimax principles, but it has been a long-standing question whether that remains true for analogous equations involving the p-Laplacian Δ_p. It will be shown that there are corresponding nonlinear eigenvalue problems

$$\Delta_p u = (q - \lambda r)|u|^{p-1} \operatorname{sgn} u, \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

with $1 < p \neq 2$ and $q, r \in C^1(\overline{\Omega})$, $r > 0$ on $\overline{\Omega}$, for which not all eigenvalues are of variational type. As far as we know, this is the first observation of such a phenomenon, and examples will be given for one- and higher-dimensional equations. The question of exactly which eigenvalues are variational is also discussed when $N = 1$.

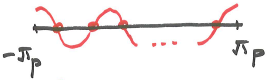
* Corresponding author.
E-mail addresses: binding@ucalgary.ca (P.A. Binding), bryan@ma.hw.ac.uk (B.P. Rynne).

0022-0396/$ – see front matter © 2007 Elsevier Inc. All rights reserved.
doi:10.1016/j.jde.2007.10.010

BINDING, RYNNE :

$$\mu_k^\varepsilon = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{k+1}} \sup_{u \in \mathcal{A}} \left(\int_{-\pi_p}^{\pi_p} |u'|^p dx + \varepsilon \int_{-\pi_p}^{\pi_p} q |u|^p dx \right)$$

$$\ldots < \mu_{2n-1}^\varepsilon \leq \mu_{2n}^\varepsilon < \mu_{2n+1}^\varepsilon \leq \mu_{2n+2}^\varepsilon < \ldots$$

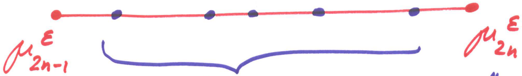


2n zeros

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \mu_k^\varepsilon = \lambda_k$$

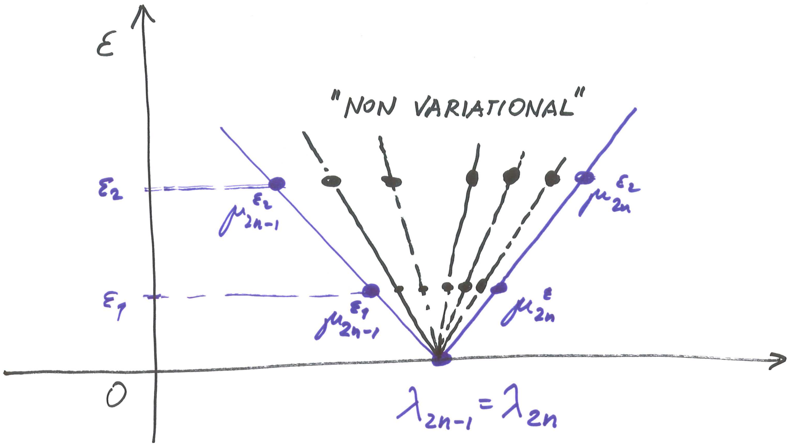
BINDING, RYNNE: $\{\mu_k^\varepsilon\}$ ARE NOT ALL EIGENVALUES

$\forall n\ \forall m\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ (\varepsilon \ll 1)\ \exists\, m$ EGV'S IN



m "NON VARIATIONAL" EIGENVALUES

TOOL: "THE RIGHT" CONSTRUCTION OF q AND BIFURCATION ARGUMENT



ε
"NON VARIATIONAL"
ε_2
ε_1
$\mu_{2n-1}^{\varepsilon_2}$
$\mu_{2n-1}^{\varepsilon_1}$
$\mu_{2n}^{\varepsilon_2}$
μ_{2n}^{ε}
0
$\lambda_{2n-1}=\lambda_{2n}$

JOINT WORK WITH PETER TAKÁČ:

$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \exists\, C^\infty$-function $q = q(x)$, π_p-periodic even

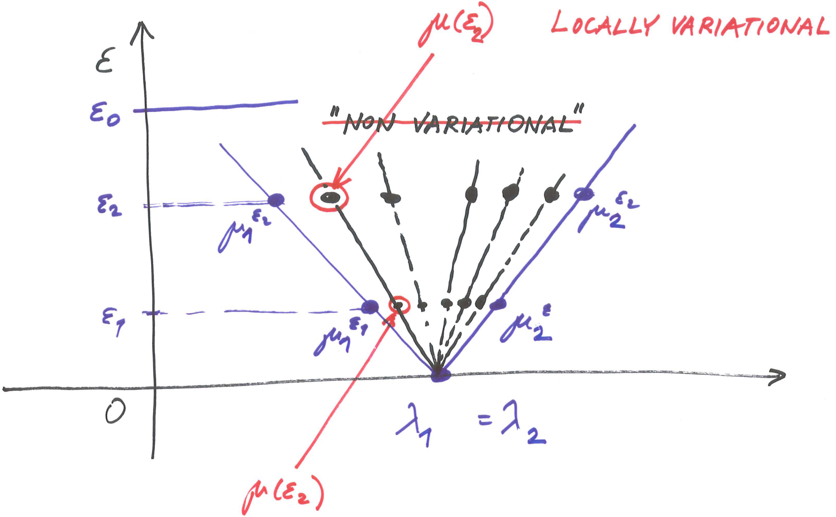
$\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$: $\mu_1^\varepsilon < \mu_2^\varepsilon$ (L.-S. EIG.)

$\mu(\varepsilon) \in (\mu_1^\varepsilon, \mu_2^\varepsilon)$ (NOT L.-S. EIGENV.)

$$\mu(\varepsilon) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} \max_{u \in \gamma} \left(\int_{-\pi_p}^{\pi_p} |u'(x)|^p dx + \varepsilon \int_{-\pi_p}^{\pi_p} q(x) |u(x)|^p dx \right)$$

$\mathcal{C}$ "SPECIAL" CLASS OF CURVES ON MANIFOLD

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in W^{1,p}(-\pi_p, \pi_p) : u \text{ is } 2\pi_p\text{-per.}, \int_{-\pi_p}^{\pi_p} |u|^p dx = 1 \right\}$$



$\mu(\varepsilon_2)$
LOCALLY VARIATIONAL
ε
ε_0
"NON VARIATIONAL"
ε_2
$\mu_1^{\varepsilon_2}$
$\mu_2^{\varepsilon_2}$
ε_1
$\mu_1^{\varepsilon_1}$
μ_2^{ε}
0
$\lambda_1 = \lambda_2$
$\mu(\varepsilon_2)$

ROUGHLY SPEAKING:

$$\mu_1^\varepsilon = \inf_{\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}} \max_{u \in \gamma} (\ldots)$$

$\tilde{\mathcal{C}}$ is the family of all symmetric curves on $\mathcal{S}$ from the "north" to the "south"

$$\mu(\varepsilon) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} \max_{u \in \gamma} (\ldots)$$

$\mathcal{C}$ is the family of "some" symmetric curves on $\mathcal{S}$ from the "north" to the "south"

THIS FAMILY IS INVARIANT WITH RESPECT TO THE DEFORMATION LEMMA

ROUGHLY SPEAKING:

2^{nd} L.-S. eigenvalue corresponds to the <u>global minimizer</u>

$\mu(\varepsilon)$ corresponds to the <u>local minimizer</u>

BACK TO THE p-LAPLACIAN IN HIGHER DIMENSION : "Δ_p"

$$(*) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) - \lambda |u|^{p-2}u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Ω DOMAIN WITH "SYMMETRIES" $\overset{?}{\Longrightarrow}$

THE SET OF ALL EIGENVALUES FORMS A SEQUENCE $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ AND

$$\lambda_n = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}_n} \sup_{u \in \mathcal{A}} \dots$$

$\exists$ PERTURBATION $\tilde{\Omega}$ OF SYMMETRIC Ω SUCH THAT (*) ON $\tilde{\Omega}$ HAS A SEQUENCE OF EIGENVALUES $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ("GLOBAL MINIMIZERS") AND, <u>MOREOVER</u>, OTHER EIGENVALUES ("LOCAL MINIMIZER", "SADDLES", ...)

Thank you for your attention!

Thank you for your attention!