Cvičení z NSTP022
18. – 22. 3. 2013

Náhodné vektory

1. Házíme třikrát mincí. Označme X počet líců v prvních dvou hodech a Y počet rubů v posledních dvou hodech.
   (a) Určete sdružené rozdělení vektoru (X, Y).
   (b) Určete marginální rozdělení veličin X a Y. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Spočtěte kovarianci $\mathsf{cov}\,(X, Y)$ a korelační koeficient ρ_{XY}. Jaký je vztah mezi nezávislostí dvou veličin a jejich kovariancí/korelací?

2. Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny X a Y. Ze zkušenosti víte, že vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu
$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak}\ . \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu $c > 0$.
   (b) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
   (c) Spočtěte kovarianci $\mathsf{cov}\,(X, Y)$ a korelační koeficient ρ_{XY}. Interpretujte.
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte více než dvojnásobek toho, co za jídlo?
   (e) Spočtěte $\mathsf{E}\left(\frac{1}{X+Y}\right)$.
   (Na rozmyšlení: Jak vypadá distribuční funkce $F(x, y)$?)

3. Dvojice součástek má dobu životnosti popsanou sdruženou hustotou
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (a) Jaké je rozdělení dob životnosti jednotlivých součástek? Jsou tyto doby nezávislé?
   (b) S jakou pravděpodobností první součástka přežije druhou?

4. Krajta naklade N vajíček, kde N je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením $\mathsf{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Pravděpodobnost, že se z vajíčka vylíhne živá krajtička, je $p \in (0, 1)$.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhne právě k krajtiček? Jaký je očekávaný počet vylíhnutých krajtiček?
   (b) Jaké je rozdělení N, jestliže víme, že se vylíhlo k krajtiček?
   (c) Jsou veličiny udávající počet nakladených vajíček N a počet vylíhnutých krajtiček nezávislé?

5. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$. Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin X a Y a jejich korelační koeficient ρ_{XY}. Jsou X a Y nezávislé?

6. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na množině M, kde $M = \{(x, y) :\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1],\ y \geq x\}$.
   (a) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.
   (b) Spočítejte $\mathsf{cov}\,(X, Y)$.

7. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F a hustotou f. Označme $U = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ a $V = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.
   (a) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny U.
   (b) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny V.
   (c) Nechť F a f odpovídají rovnoměrnému rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Spočtěte v tomto případě $\mathsf{E}\,U$, $\mathsf{var}\,(U)$, $\mathsf{E}\,V$ a $\mathsf{var}\,(V)$.

Opakování z přednášky

Kovariance a korelace: Nechť $\mathsf{E}\,X^2 < \infty$, $\mathsf{E}\,Y^2 < \infty$. Kovariance $\mathsf{cov}\,(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$\mathsf{cov}\,(X,Y) = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\,X)(Y - \mathsf{E}\,Y) = \mathsf{E}\,(XY) - (\mathsf{E}\,X)(\mathsf{E}\,Y).$$

Koeficient korelace $\mathsf{cor}\,(X,Y) = \rho_{XY}$ je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\mathsf{cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{var}\,X}\sqrt{\mathsf{var}\,Y}},$$

je-li $\mathsf{var}\,X, \mathsf{var}\,Y > 0$. Platí vždy $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Marginální rozdělení:

(a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$, pak marginální hustotu veličiny X spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Podobně pro marginální hustotu f_Y veličiny Y.

(b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak marginální rozdělení veličiny X spočteme jako

$$\mathsf{P}(X = x_i) = \sum_j \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Nezávislost:

(a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou f, X má marginální hustotu f_X a Y má hustotu f_Y, pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X = x_i)\,\mathsf{P}(Y = y_j) \quad \text{pro všechna } x_i, y_j.$$

Beta funkce: Při výpočtech se někdy hodí používat tzv. **beta funkci**, která je pro $a, b > 0$ definovaná jako

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x.$$

Souvislost s gama funkcí (viz předchozí cvičení):

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Výsledky

1.(a) sdružené rozdělení:

		Y		
		0	1	2
	0	0	1/8	1/8
X	1	1/8	1/4	1/8
	2	1/8	1/8	0

(b) marginální rozdělení: $\mathsf{P}(X = 0) = 1/4$, $\mathsf{P}(X = 1) = 1/2$, $\mathsf{P}(X = 2) = 1/4$, totéž pro Y. Veličiny X a Y jsou závislé.

(c) $\mathsf{cov}\,(X, Y) = -1/4$, $\rho_{XY} = -1/2$. Platí: X, Y nezávislé (a ex. $\mathsf{E}\,X^2$, $\mathsf{E}\,Y^2$) $\Rightarrow \mathsf{cov}\,(X, Y) = 0$. Opačné tvrzení obecně neplatí.

2.(a) $c = 1$,

(b) $f_X(x) = x + 1/2$ pro $x \in (0, 1)$ a $f_X(x) = 0$ jinak; $f_Y(y) = y + 1/2$ pro $y \in (0, 1)$ a $f_Y(y) = 0$ jinak; veličiny X a Y jsou závislé,

(c) $\mathsf{cov}\,(X, Y) = -1/144$, $\rho_{XY} = -1/11$,

(d) $\mathsf{P}(Y > 2X) = 5/24$,

(e) $\mathsf{E}\left(\frac{1}{X+Y}\right) = 1$.

3.(a) obě součástky mají exponenciální rozdělení: $f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}$ pro $x > 0$ a $f_X(x) = 0$ jinak, $f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}$ pro $y > 0$ a $f_Y(y) = 0$ jinak; doby životnosti jsou nezávislé,

(b) $\mathsf{P}(X > Y) = 1/3$.

4.(a) $\mathsf{P}(X = k) = (\lambda p)^k \mathrm{e}^{-\lambda p}/k!$, $k = 0, 1, \ldots$ tj. počet narozených krajtiček má Poissonovo rozdělení $\mathsf{Po}(\lambda p)$ a tedy $\mathsf{E}\,X = \lambda p$,

(b) $\mathsf{P}(N = n|X = k) = \frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}$ pro $n = k, k + 1, \ldots,$

(c) veličiny jsou závislé.

5. $\rho_{XY} = 0$, veličiny jsou závislé.

6. (a) Veličiny X a Y jsou závislé, (b) $\mathsf{cov}\,(X, Y) = 1/36$.

7.(a) $F_U(u) = [F(u)]^n$, $f_U(u) = n[F(u)]^{n-1} f(u)$,

(b) $F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n$, $f_V(v) = n[1 - F(v)]^{n-1} f(v)$,

(c) $\mathsf{E}\,U = n/(n + 1)$, $\mathsf{var}\,(U) = n/[(n + 1)^2(n + 2)]$,
$\mathsf{E}\,V = 1/(n + 1)$, $\mathsf{var}\,(V) = n/[(n + 1)^2(n + 2)]$.