Cvičení z NSTP022
10. týden cvičení (22. – 26. 4. 2013)

Bodový odhad II.

1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
   (a) Odvoďte odhad T_n parametru λ metodou maximální věrohodnosti.
   (b) Zjistěte, zda je tento odhad T_n nestranný a konzistentní odhad λ.
   (c) Uvažujme odhad
   $$U_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\overline{X}_n}$$
   pravděpodobnosti $p_0 = \mathrm{P}(X_1 = 0)$. Zjistěte, zda je U_n nestranný odhad p_0.
   (d) Zjistěte, zda je U_n konzistentní odhad p_0.
   (e) Zjistěte, zda je $V_n = e^{-\overline{X}_n}$ nestranný (resp. asymptoticky nestranný) a konzistentní odhad p_0.
   (f) Zjistěte, zda je odhad $W_n = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$ nestranný (resp. asymptoticky nestranný) a konzistentní odhad p_0.

2. Sledujeme nehodovost na ulici Sokolovská. Lze předpokládat, že počet nehod v daný den má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ a že nehodovosti v různých dnech jsou nezávislé a stejně rozdělené. Po 30 dnech pečlivého měření jsme obdrželi následující data:

Počet nehod	0	1	2	3	4	5	6
Počet dní	5	8	8	3	2	3	1

   Pomocí výsledků příkladu 1 odhadněte parametr λ a pravděpodobnost, že se v náhodně vybraný den nestane žádná nehoda.

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou
   $$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}} \exp\{-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\}, \quad x \in \mathbb{R},$$
   kde oba parametry μ i $\sigma^2 > 0$ jsou neznámé. Najděte maximálně věrohodný odhad obou parametrů (současně) a vyšetřete jeho vlastnosti.

4. Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p pro výběr $X_1, \ldots, X_n$ z geometrického rozdělení, tj. $\mathsf{P}(X_i = k) = (1-p)^k p$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$, a vyšetřete jeho konzistenci.

Opakování z přednášky

- Řekneme, že odhad $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ je **nestranný** odhad parametrické funkce $g(\theta)$, jestliže

$$\mathsf{E}T_n = \mathsf{E}_\theta T_n = g(\theta), \qquad \text{pro všechna } \theta \in \Theta. \tag{10.1}$$

  Odhad T_n je **asymptoticky nestranný** odhad $g(\theta)$, jestliže $\mathsf{E}_\theta T_n \to g(\theta)$ při $n \to \infty$ pro všechna $\theta \in \Theta$.
- Řekneme, že odhad $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ je **konzistentní** odhad parametrické funkce $g(\theta)$, jestliže $T_n \to g(\theta)$ s.j. pro $n \to \infty$ pro všechna $\theta \in \Theta$, t.j.

$$\mathsf{P}_\theta(\lim_{n\to\infty} T_n = g(\theta)) = 1 \qquad \text{pro všechna } \theta \in \Theta. \tag{10.2}$$

Stručný popis konstrukce odhadu metodou maximální věrohodnosti. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení, které závisí na neznámém parametru $\theta \in \Theta$. Předpokládejme, že toto rozdělení má hustotu $f(x, \theta)$ vzhledem k nějaké σ-konečné míře ν (ν bude čítací míra v případě diskrétního rozdělení a Lebesguova míra v případě spojitého rozdělení). Odhad $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ je **odhad metodou maximální věrohodnosti**, jestliže T_n maximalizuje tzv. věrohodnost

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) \tag{10.3}$$

přes všechna $\theta \in \Theta$. Ekvivalentně, T_n maximalizuje logaritmickou věrohodnost

$$l_n(\theta) = \log[L_n(\theta)] = \sum_{i=1}^{n} \log[f(X_i, \theta)]. \tag{10.4}$$

Máme tedy $T_n = \arg\max_{\theta\in\Theta} L(\theta) = \arg\max_{\theta\in\Theta} l(\theta)$.

Za určitých dalších předpokladů lze T_n najít jako řešení věrohodnostní rovnice $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} l_n(\theta) = 0$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \sum_{i=1}^{n} \log[f(X_i, \theta)] = 0. \tag{10.5}$$

Výsledky

1.(a) $T_n = \overline{X}_n$,

(b) T_n je nestranný i konzistentní odhad λ,

(c) U_n je nestranný odhad $p_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$,

(d) U_n je konzistentní odhad p_0,

(e) V_n není nestranný, ale je asymptoticky nestranný a konzistentní odhad p_0.

(f) W_n není nestranný, ale je asymptoticky nestranný a konzistentní odhad p_0.

2. $\hat{\lambda} = 62/30 = 2{,}0667$, $\hat{p_0} = (29/30)^{62} = 0{,}1222$ nebo $\hat{p_0^*} = \mathrm{e}^{-62/30} = 0{,}1266$.

3. $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$. Odhad $\hat{\mu}_n$ je nestranný a konzistentní odhad parametru μ. Odhad $\hat{\sigma}_n^2$ je konzistentní odhad parametru σ^2, ale není nestranný.

4. $\hat{p}_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$, odhad je konzistentní.