Diskrétní náhodná veličina

22. – 26. 10. 2012

1. Určete rozptyl náhodných veličin uvažovaných v příkladech 4, 5 a 6 v zadání z minulého týdne. Jaká je očekávaná hodnota a rozptyl relativní četnosti *nezkreslených* znaků z úlohy 5?

2. Z deseti milionu pixelů jsou v průměru dva vadné. Jaká je pravděpodobnost, že na obrazovce, která má $1280 \cdot 1024$ pixelů, bude alespoň jeden vadný pixel?

3. Vendelín má na svazku 8 klíčů a snaží se odemknout dveře (ke kterým pasuje právě jeden klíč). Náhodně vybere klíč a vyzkouší ho. Po každém neúspěšném pokusu mu klíče spadnou na zem a další klíč znovu volí náhodně. Tak pokračuje, dokud konečně dveře neotevře.
   (a) Jaké je rozdělení počtu všech neúspěšných Vendelínových pokusů?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že Vendelín zaznamená nejvýše 6 neúspěšných pokusů?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že neodejde dříve než po desátém neúspěšném pokusu, má-li za sebou již šest neúspěšných?
   (d) Jaký je očekávaný počet neúspěšných pokusů?

4. Veličina X určuje počet příchozích hovorů na policejní stanici za jednu hodinu. Lze předpokládat, že na stanici přijde právě k hovorů s pravděpodobností $\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$, kde $\lambda > 0$.
   (a) Ověřte, že se jedná o pravděpodobností rozdělení. Jak se toto rozdělení nazývá?
   (b) Určete očekávaný počet příchozích hovorů za jednu hodinu. (Výpočet proveďte z definice.)
   (c) Vypočítejte $\mathsf{E}X$ a rozptyl $\mathsf{Var}\, X$ pomocí momentové vytvořující funkce.

5. Uvažujme loterii, ve které je každý stírací los výherní s pravděpodobností p a nevýherní s pravděpodobností $1 - p$, kde $p \in (0, 1)$. Předpokládejme, že jsme se rozhodli kupovat losy, dokud nevyhrajeme (a pak už žádné další nekoupíme).
   (a) Určete rozdělení a očekávaný počet zakoupených nevýherních losů.
   (b) Předpokládejme, že výhra v dané loterii je 100 000 Kč a jeden los stojí 100 Kč. Jaké musí být alespoň p, aby se nám celá naše strategie vyplatila?

6. Celkem n pánů si v šatně pánského klubu odložilo klobouk. Při hromadném odchodu z klubu dá šatnářka každému jeden náhodně vybraný klobouk.
   (a $\star$) Určete rozdělení počtu správně přiřazených klobouků a ověřte, že se jedná o pravděpodobnostní rozdělení. Jaká je limita tohoto rozdělení pro $n \to \infty$?
   (a) Určete očekávaný počet správně přiřazených klobouků.

7. Celkem n pánů si v šatně pánského klubu odložilo klobouk. Při hromadném odchodu z klubu postupně hledají své klobouky v šatně. Nejprve náhodně tahá první pán, dokud nenajde svůj klobouk. Až ho má, odchází a pokračuje druhý pán, po něm třetí atd., dokud nemá klobouk i poslední pán. Určete očekávaný počet všech tahů.

Opakování

Diskrétní náhodná veličina:

Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha hodnot $x_1, x_2, \dots$, říkáme, že má diskrétní rozdělení.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** je po částech konstantní, zprava spojitá, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.
- **Střední hodnota** X se spočítá jako

$$\mathsf{E}X = \sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad \text{(existuje-li)}.$$

- **Rozptyl** X se spočítá jako

$$\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k\right)^2 \quad \text{(existuje-li)}.$$

- Střední hodnota náhodné veličiny $Y = h(X)$ se spočítá jako

$$\mathsf{E}Y = \mathsf{E}h(X) = \sum_k h(x_k) \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k) p_k \quad \text{(existuje-li)},$$

  nebo přímo z rozdělení Y jako $\mathsf{E}Y = \sum_y y \mathsf{P}(Y = y)$.

Užitečné vlastnosti

- **Momentová vytvořující funkce** veličiny X je funkce reálné proměnné $t \in \mathbb{R}$ definovaná jako $\psi(t) = \mathsf{E}e^{tX}$ (existuje-li). Platí

$$\mathsf{E}X = \psi'(0), \quad \mathsf{Var}\, X = \psi''(0) - (\psi'(0))^2.$$

- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí

$$\mathsf{E}(a + bX) = a + b\mathsf{E}X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2 \mathsf{Var}\, X.$$

- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny, pak platí

$$\mathsf{E}(aX + bY) = a\mathsf{E}X + b\mathsf{E}Y.$$