

VÝSLEDKY PŘÍKLADŮ ZE CVIČENÍ

POSLEDNÍ ÚPRAVA: 27. LISTOPADU 2013

CVIČENÍ 1: KLASICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

1. 4 kostky:

- (a) $5/18$
- (b) $1/16$
- (c) $10/6^4$
- (d) $1 - 5/6^4$
- (e) $1 - (5/6)^4$

2. pivo: a) $3/10$ b) $5/6$

3. sekretářka a obálky:

- (a) $1 - 1/2 + 1/3! - \dots + (-1)^{n+1}1/n! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}1/k! = 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k/k!$
- (b) $\sum_{k=1}^n (-1)^k/k! \rightarrow 1 - e^{-1}$ pro $n \rightarrow \infty$

4. studenti na cvičení (Maxwellovo-Boltzmanovo schéma):

- (a) $P(A_k) = \binom{r}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k$ pro $k = 0, 1, \dots, r$ a $P(A_k) = 0$ pro $k > r$
- (b) $P(B) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^r$ pro $r \geq n$ a $P(B) = 0$ pro $r < n$
- (c) $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$

5. peníze do obálek (Boseovo-Einsteinovo schéma):

- (a) $P(A_k) = \frac{\binom{n+r-k-2}{r-k}}{\binom{n+r-1}{r}} = \frac{r!(n+r-2-k)!(n-1)}{(r-k)!(n+r-1)!}$ pro $k = 0, 1, \dots, r$ a $P(A_k) = 0$ pro $k > r$
- (b) $P(B) = \frac{(r-1)!r!}{(n+r-1)!(r-n)!}$ pro $r \geq n$ a $P(B) = 0$ pro $r < n$
- (c) $\frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}}$ pro $k = 0, 1, \dots$

6. zkoušení klíčů: $1/n$

CVIČENÍ 2: VLASTNOSTI PRAVDĚPODOBNOSTI

1. Geometrická pravděpodobnost: $11/36$ 2. Nezávislost neslučitelných jevů: jediné pokud $P(A) = 0$ nebo $P(B) = 0$ 3. Vlák: a) 0.1 b) $2/3$ c) nejsou

4. Házání kostkami: jsou po dvou nezávislé, ale nejsou nezávislé

5. Krabice: $3/80$ 6. Zkreslování přenosu: $(11/14)^6$ 7. Polya: a) $b/(a+b)$ v obou případech (b) $b/(a+b)$

CVIČENÍ 3: BAYESOVA VĚTA, NÁHODNÁ VELIČINA

1. Spam: a) $1/25 = 0.04$, b) $8/25 = 0.32$

2. Tři truhly: $2/3$

3. Tři lovci: $3/29$, $8/29$, $18/29$

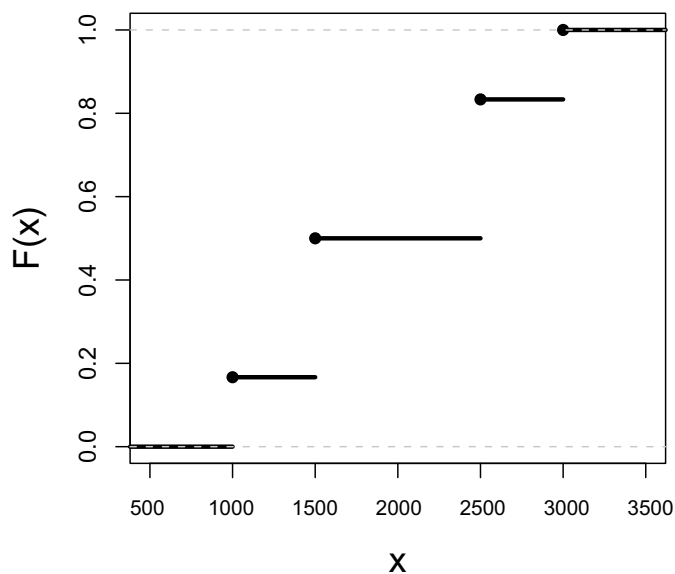
4. Zloděj:

(a) rozdělení X : $P(X = 1000) = 1/6$, $P(X = 1500) = 1/3$, $P(X = 2500) = 1/3$, $P(X = 3000) = 1/6$;

(b) očekávaná ztráta $EX = 2000$;

(c) $\text{Var } X = 5 \cdot 10^5$,

$$(d) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1000, \\ 1/6, & x \in [1000, 1500), \\ 1/2, & x \in [1500, 2500), \\ 5/6, & x \in [2500, 3000), \\ 1, & x \geq 3000. \end{cases}$$



5. Zkreslování přenosu:

a) binomické rozdělení $\text{Bi}(n, 3/14)$, tj. $P(X = k) = \binom{n}{k} (3/14)^k (11/14)^{n-k}$ pro $k = 0, 1, \dots, n$,

b) $EX = n \cdot 3/14$,

c) $\text{Var } X = n \cdot 3/14 \cdot 11/14$.

6. Testové otázky:

a) binomické rozdělení $\text{Bi}(n, 1/4)$, tj. $P(X = k) = \binom{n}{k} (1/4)^k (3/4)^{n-k}$ pro $k = 0, 1, \dots, n$,

b) $EX = n \cdot 1/4$,

c) $\text{Var } X = n \cdot 1/4 \cdot 3/4$.

CVIČENÍ 4: DISKRÉTNÍ NÁHODNÁ VELIČINA

1. výpočet přes binomické rozdělení: $P(X \geq 1) = 1 - (1 - 2 \cdot 10^{-7})^{1.3 \cdot 10^6} = 0.23$
výpočet přes Poissonovo rozdělení: $P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-0.26} = 0.23$
- 2.(a) $P(X = k) = (1 - p)^k \cdot p = \left(\frac{7}{8}\right)^k \cdot \frac{1}{8}$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$ geometrické rozdělení
 - (b) $P(X \leq 6) = 1 - (1 - p)^7 = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^7$
 - (c) $P(X \geq 10 | X \geq 6) = (1 - p)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = P(X \geq 4)$, tj. geometrické rozdělení má tzv. zapomínací schopnost
 - (d) očekávaný počet všech neúspěšných pokusů je $EX = 1/p - 1 = 7$
- 3.(a) jedná se o pravděpodobnostní rozdělení (součet pravděpodobností je 1), tzv. Poissonovo rozdělení
 - (b) $EX = \lambda$
 - (c) $EX = \lambda, \text{Var } X = \lambda$
- 4.(a) geometrické rozdělení, $P(X = k) = (1 - p)^k p, k = 0, 1, 2, \dots, EX = \frac{1-p}{p}$
(b) alespoň 0.001
5. $c = \frac{2}{n(n+1)}, EX = \frac{2n+1}{3}$

CVIČENÍ 5: SPOJITÁ NÁHODNÁ VELIČINA

1. Dítě:

(a)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/3, & x \in [0, 3], \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

- (b) $P(X = 1) = 0, P(X \geq 1) = 2/3, P(1/2 < X < 2) = 1/2$
- (c) $EX = 3/2$
- (d) $\text{Var } X = 3/4$
- (e) $P(X > 2 | X > 1) = 1/2$

2. Telefonní hovor:

- (a) $c = 1/5$
- (b) $EX = 5$ minut
- (c) $F(x) = 1 - e^{-x/5}$ pro $x \geq 0$ a $F(x) = 0$ pro $x < 0$
- (d) $P(X > 10) = e^{-2}$
- (e) $P(X \geq 10 | X \geq 5) = e^{-1} = P(X \geq 5)$
- (f) $\text{Var } X = 25$
- (g) $Y = 1 + 3X$, distr. fce Y je $G(y) = 1 - \exp\{-\frac{y-1}{15}\}$ pro $y \geq 1$ a $G(y) = 0$ pro $y < 1$
- (h) $EY = 16$ Kč, $\text{Var } Y = 9 \cdot 25 = 225$

3. Pes:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \frac{\left(a - \frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2}{a^2}, & x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}a], \\ 1, & x > \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$

hustota $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{a - \frac{2}{\sqrt{3}}x}{a^2}$ pro $x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}a]$ a $f(x) = 0$ jinak,
střední hodnota $EX = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

CVIČENÍ 6: NÁHODNÉ VEKTORY

1.(a) sdružené rozdělení

X	Y		
	0	1	2
0	0	0	1/8
1	0	2/8	1/8
2	1/8	2/8	0
3	1/8	0	0

(b) marginální rozdělení X :

$$P(X = 0) = \frac{1}{8} = P(X = 3), \quad P(X = 1) = \frac{3}{8} = P(X = 2),$$

marginální rozdělení Y :

$$P(Y = 0) = \frac{1}{4} = P(Y = 2), \quad P(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

(c) nejsou, jsou závislé

(d) $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{2}$ (e) korelace $\rho_{XY} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

2.(a) marginální hustoty

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y \geq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(b) $\text{Cov}(X, Y) = 0$

(c) jsou nezávislé

(d) $E(X + Y) = 3$ 3. $\text{Cov}(X, Y) = 0 = \rho_{XY}$, ale veličiny jsou závislé4.(a) $EX_i = 1/n$, $\text{Var } X_i = (n-1)/n^2$

(b) nejsou

(c) $\text{Cov}(X_i, X_j) = 1/[n^2(n-1)]$ (d) $EX = 1$, $\text{Var } X = 1$

CVIČENÍ 7: KVANTILOVÁ FUNKCE, TRANSFORMACE A SOUČTU NÁHODNÝCH VELIČIN

1. (a) $F^{-1}(u) = -2 \ln(1 - u)$, (b) medián $F^{-1}(1/2) = 2 \ln 2 < EX = 2$

2.(a) distr. funkce

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{3y}{4\pi}}, & 0 \leq y \leq 36\pi, \\ 1, & y > 36\pi. \end{cases}$$

(b) hustota:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{9} y^{-\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}, & 0 \leq y \leq 36\pi, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

3. Z má rozdělení s distr. funkcí F , tj. rozdělení z příkladu 1.

4. hustota $Z = X + Y$:

$$g(z) = \begin{cases} e^{-z/2}(1 - e^{-z/2}), & z \geq 0, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

5. (a) $Z = X + Y$ má Poissonovo rozdělení s parametrem 15, (b) podmíněné pravděpodobnosti odpovídají binomickému rozdělení $\text{Bi}(n, 1/3)$

6. maximum za týden (5 pracovních dnů), tj. veličina $M = \max_{1 \leq i \leq 5} X_i$ má distribuční funkci

$$G(x) = F(x)^5 = \begin{cases} (1 - e^{-x/2})^5, & x \geq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

CVIČENÍ 8: NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ, ČEBYŠEVOVA NEROVNOST

1.(a) $1 - \Phi(2.17) = 0.015$

(b) $\Phi(0.61) + \Phi(0.95) - 1 = 0.554$

(c) $1 - \Phi(2.52) + 1 - \Phi(2.17) = 0.021$

(d) pravidlo dvou sigma: $P(123.3 \leq X \leq 148.9) = 0.95$,
pravidlo tří sigma: $P(116.9 \leq X \leq 155.3) = 0.997$,

(e) alespoň 146.6 cm

(f) maximálně 127.9 cm

2.(a) $P(|X - \mu| > 2\sigma) = 0.05$ z pravidla dvou sigma

Čeb. nerovnost dává $P(|X - \mu| > 2\sigma) \leq 1/4 = 0.25$

(b) $P(|X - \mu| > 3\sigma) = 0.003$ z pravidla tří sigma

Čeb. nerovnost dává $P(|X - \mu| > 3\sigma) \leq 1/9 = 0.11$

3.(a) $E\nu_n = 1/2$, $\text{Var } \nu_n = 1/(4n)$

(b) ν_n konverguje k $1/2$ v pravděpodobnosti (plyne ze slabého zákona velkých čísel)

(c) $P(|\nu_n - 1/2| > 0.1) = 0.25$

(d) je potřeba $n \geq 500$ hodů