

## VLASTNOSTI PRAVDĚPODOBNOSTI

## 2. CVIČENÍ

## GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

1. Přátelé Igor a Dano si domluví schůzku mezi 9.00 a 10.00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smlouveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází, nejpozději však v 10.00. Jaká je pravděpodobnost, že se jim podaří setkat se?

## NEZÁVISLOST, PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST

2. Nechtě  $A, B$  jsou neslučitelné jevy. Mohou být tyto dva jevy nezávislé?
3. Pravděpodobnost, že ve vlaku není místo k sezení, je 0.2, a pravděpodobnost, že vlak přijede pozdě, je 0.3. Pravděpodobnost, že vlak přijede pozdě nebo v něm není místo k sezení je 0.4.
  - (a) S jakou pravděpodobností vlak přijede na čas, ale nebudete si v něm moci sednout?
  - (b) S jakou pravděpodobností si budete moci ve vlaku sednout, jestliže přijel pozdě?
  - (c) Jsou jevy [vlak přijede včas] a [ve vlaku bude místo k sezení] nezávislé?
4. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy  $A$ =[na modré kostce padlo sudé číslo],  $B$ =[na zelené kostce padlo liché číslo],  $C$ =[součet čísel je lichý]. Jsou náhodné jevy  $A, B, C$  po dvou nezávislé? Jsou jevy  $A, B, C$  nezávislé?

## VĚTA O ÚPLNÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

5. Mezi 100 krabicemi mandarinek ze Španělska je 5 krabic se shnilými, stejně jako mezi 200 krabicemi z Řecka. Nejdříve vybereme náhodně jednu ze zásilek a potom ze zásilky náhodně vybereme krabici. Určete s jakou pravděpodobností obsahuje vybraná krabice shnilé mandarinky.
6. Přenášíme binární soubor, který obsahuje znaky "0" a "1". Pravděpodobnost, že se při přenosu zkreslí "0" je  $1/4$  a pravděpodobnost, že se zkreslí "1" je  $1/6$ . Je známo, že přenášené znaky "0" a "1" se vyskytují v poměru 4:3. S jakou pravděpodobností se posloupnost o 6 znacích při přenosu nezkreslí, jestliže jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle?
7. (*Polyovo urnové schéma*) Krabice obsahuje  $a$  černých a  $b$  bílých koulí. Student náhodně vytáhne jednu kouli, poznačí si její barvu a vrátí ji zpět společně s  $d$  koulí téže barvy.
  - (a) Jaká je pravděpodobnost vytažení bílé koule v prvním a druhém tahu?
  - (b) Jaká je pravděpodobnost, že v  $n + 1$ -tém tahu vytáhneme bílou kouli?

## OPAKOVÁNÍ

### Geometrická pravděpodobnost:

- stavový prostor  $\Omega$  ztotožníme s určitým geometrickým útvarem
- body v něm ležící odpovídají elementárním jevům majícím stejnou váhu
- náhodné jevy odpovídají jeho (pěkným) podmnožinám
- pravděpodobnost náhodného jevu  $A$  definujeme jako podíl ploch (objemů, ...):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Nechť  $A, B$  jsou náhodné jevy,  $P(B) > 0$ . **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu  $A$  za podmínky  $B$  definujeme jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Nezávislost.** Náhodné jevy  $A, B$  se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Náhodné jevy  $A_1, \dots, A_n$  jsou nezávislé, jestliže pro každé  $r \leq n$  a každou  $\{i_1, \dots, i_r\}$  podmnožinu  $\{1, \dots, n\}$  platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_r}).$$

(Tj. součinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice ... atd.)

### Věta o úplné pravděpodobnosti:

Nechť  $A, B_1, B_2, \dots$  jsou náhodné jevy takové, že  $B_i \cap B_j = \emptyset$  pro všechna  $i \neq j$ ,  $\bigcup_i B_i = \Omega$  a  $P(B_i) > 0$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots$ . Pak

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$