Náhodné vektory

6. cvičení

1. Pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina Y udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.
   (a) Odvoďte rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)^T$.
   (b) Jaké jsou marginální rozdělení veličin X a Y?
   (c) Jsou veličiny X a Y nezávislé?
   (d) Spočítejte kovarianci X a Y. Jaký je vztah mezi nezávislostí dvou veličin a jejich kovariancí?
   (e) Spočtěte korelační koeficient mezi X a Y.

2. Náhodná veličina X udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina Y udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro A ve stanici Malostranská (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor $(X, Y)^T$ má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?
   (b) Spočítejte kovarianci X a Y.
   (c) Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?
   (d) Jaká je střední doba Vašeho celkového čekání na dopravní prostředky?

3. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$. Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin X a Y a jejich korelační koeficient ρ_{XY}. Jsou X a Y nezávislé?

4. Zmatená šatnářka náhodně přiřadí n pánům jejich klobouky. Náhodná veličina X_i je indikátor jevu, zda má i-tý pán správný klobouk, $i = 1, \dots, n$ (tj. $X_i = 1$, pokud i-tý pán má svůj klobouk a $X_i = 0$ jinak).
   (a) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny X_i pro pevně zvolené i.
   (b) Jsou veličiny X_i, X_j pro pevné i, j nezávislé?
   (c) Spočítejte kovarianci X_i a X_j.
   (d) Na základě výše uvedených výsledků spočítejte očekávanou hodnotu a rozptyl počtu správně přiřazených klobouků. (Využijte fakt, že počet správně přiřazených klobouků X lze vyjádřit jako $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.)

Opakování z přednášky

Kovariance a korelace: Kovariance $\mathsf{Cov}\,(X,Y)$ náhodných veličin X,Y je definována jako

$$\mathsf{Cov}\,(X,Y) = \mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)(Y-\mathsf{E}Y) = \mathsf{E}(XY) - (\mathsf{E}X)(\mathsf{E}Y),$$

je-li $\mathsf{E}X^2 < \infty$, $\mathsf{E}Y^2 < \infty$.
Koeficient korelace ρ_{XY} je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\mathsf{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}\,X}\sqrt{\mathsf{Var}\,Y}},$$

je-li $\mathsf{Var}\,X, \mathsf{Var}\,Y > 0$. Platí vždy $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$. Korelační koeficient je mírou lineární závislosti mezi X a Y.

Marginální rozdělení:

(a) Jestliže má $(X,Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak marginální rozdělení veličiny X je diskrétní a spočteme jej jako

$$\mathsf{P}(X = x_i) = \sum_j \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

(b) Jestliže má $(X,Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$, pak marginální hustotu veličiny X spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy.$$

Podobně pro marginální hustotu f_Y veličiny Y.

Nezávislost:

(a) Jestliže má $(X,Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou f, X má marginální hustotu f_X a Y má hustotu f_Y, pak jsou veličiny X,Y nezávislé právě tehdy, když

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Jestliže má $(X,Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak jsou veličiny X,Y nezávislé právě tehdy, když

$$\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X = x_i)\mathsf{P}(Y = y_j) \quad \text{pro všechna } x_i, y_j.$$

Další užitečné vlastnosti: Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $\mathsf{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathsf{E}X_i$
- $\mathsf{Var}\,(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathsf{Var}\,X + \sum\sum_{i\neq j} a_i a_j \mathsf{Cov}\,(X_i, X_j)$