Kvantilová funkce, transformace a součty náhodných veličin

7. cvičení

1. Doba strávená čekáním na metro je náhodná veličina X s hustotou $f(x) = 1/2e^{-x/2}I[x \geq 0]$.
   (a) Spočítejte kvantilovou funkci veličiny X a načrtněte její graf.
   (b) Určete medián X a porovnejte jej se střední hodnotou $\mathsf{E}X$.
2. Poloměr bubliny vyfouknuté z bublifuku (v cm) je náhodná veličina R s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 3]$.
   (a) Určete distribuční funkci objemu bubliny V.
   (b) Jaká je hustota objemu bubliny?
3. Nechť U je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 1]$ a nechť F^{-1} je kvantilová funkce z příkladu 1. Spočítejte rozdělení veličiny $Z = F^{-1}(U)$.
4. Jaké je rozdělení celkové doby čekání na dopravní prostředky z příkladu 2 z minulého cvičení (uvažovali jsme čekání na tramvaj $X \sim f_X(x) = e^{-x}I[x \geq 0]$ a čekání na metro $Y \sim f_Y(y) = 1/2e^{-y/2}I[y \geq 0]$).
5. V daný den Vám přijde X řádných emailů a Y spamů, kde X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry 10 a 5.
   (a) Určete rozdělení celkového počtu emailů ve Vaší schránce.
   (b) Jaké je rozdělení počtu spamů, jestliže víme, že v emailové schránce máme celkem n emailů?
6. Jaké je rozdělení maximální doby, kterou strávíte čekáním na metro za jeden týden?

Opakování z přednášky

Kvantilová funkce: Kvantilová funkce F^{-1} náhodné veličiny X je definována pro $u \in (0,1)$ jako

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}.$$

Je-li F spojitá rostoucí, pak F^{-1} je inverzní funkcí k F. Hodnotám $F^{-1}(u)$ říkáme kvantily.

Medián veličiny X je taková hodnota $\hat{x}$, pro kterou $\mathsf{P}(X \leq \hat{x}) = \mathsf{P}(X \geq \hat{x}) = 1/2$ (obecně nemusí být jediná). V případě, že je F spojitá a rostoucí, pak $\hat{x} = F^{-1}(1/2)$.

Rozdělení součtu náhodných veličin (věta o konvoluci):

– Nechť X, Y jsou **nezávislé** náhodné veličiny s diskrétním rozdělením na celočíselných hodnotách s $\mathsf{P}(X = k) = p_k$ a $\mathsf{P}(Y = k) = q_k$. Pak veličina $Z = X + Y$ nabývá také jen celočíselných hodnot a
$$\mathsf{P}(Z = k) = \sum_j p_j q_{k-j}.$$

– Jsou-li X, Y **nezávislé** náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami f_X, f_Y, pak má veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou
$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$