Cvičení NMFM310 29.4.2015

Příklad 1:

Ukažte, že exponenciální rozdělení je rozdělení bez paměti, tj. že pro náhodnou veličinu Y s exponenciálním rozdělením platí

$$P(Y > s + h|Y > s) = P(Y > h)$$

Příklad 2:

Ukažte, že součet k nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem λ – tj. hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, má Erlangovo (Gamma) rozdělení s parametry λ a k, tj. s hustotou

$$g_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Příklad 3:

Ověřte, že pro Poissonův proces $(N(t), t \geq 0)$ platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned}
P(N(t+h) = k+1\,|N(t) = k) \quad &= \lambda h + o(h),\\
P(N(t+h) = k\,|N(t) = k) \quad &= 1 - \lambda h + o(h),\\
P(N(t+h) > k+1\,|N(t) = k) \quad &= o(h),
\end{aligned}$$

kde pro funkci $o(h)$ platí $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Příklad 4: Simulování Poissonova procesu

Ověřte, že následující algoritmus opravdu generuje Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ na intervalu $[0, T]$:
Krok 1.: Generujme hodnotu náhodné veličiny S, která má Poissonovo rozdělení s parametrem λT - toto bude celkový počet událostí na intervalu $[0, T]$.
Krok 2: Vygenerujme celkem S nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, T]$. Setřiďme je do neklesající posloupnosti a tuto neklesající posloupnost vezměme za časy událostí - Poissonovův proces je pak odpovídající čítací proces.