2 Diferenciální rovnice

2.1 Modely růstu

V této kapitole budeme zabývat jednoduchými deterministickými modely růstu, například růstu populací, objemu nějaké komodity apod. Funkce $y(t) \geq 0$ bude označovat velikost populace v čase t, pokud nebude řečeno jinak. Model bude určen diferenciální rovnicí, která udává závislost rychlosti růstu v čase t, popsané derivací $\frac{dy}{dt}$, na velikosti populace v čase t.

Diferenciální rovnice vždy bude tvaru

$$\frac{dy}{dt} = ay \cdot g\left(\frac{y}{k}\right),$$

kde g je daná funkce a $a, k > 0$ jsou neznámé konstanty (parametry). Model tedy obsahuje část odpovídající lineární závislosti rychlosti růstu na současné velikosti populace, tato závislost je však korigována zvoleným tvarem funkce g.

Exponenciální růst

$g(x) \equiv 1$. Příslušná diferenciální rovnice je tvaru

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad a > 0.$$

Její řešení je tvaru

$$y(t) = be^{at}, \tag{7}$$

kde $a > 0, b > 0$ jsou parametry. Toto je klasický model neomezeného růstu při dostatku zdrojů.

Logistický růst

$g(x) = 1 - x$. Diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dt} = ay(1 - \frac{y}{k}) \tag{8}$$

má řešení ve tvaru

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}}, \tag{9}$$

kde $a, b, k > 0$ jsou kladné parametry zajišťující, že výsledná funkce $y(t)$ bude rostoucí. Povšimněme si, že platí

$$0 < y(t) < k, \ t \in \mathbb{R}; \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = k.$$

Růst podle logistické funkce je tedy omezen saturační hodnotou k a odpovídá situaci, kdy má populace k dispozici jen omezené zdroje. Funkce je symetrická kolem inflexního bodu $\tilde{t} = \frac{\ln b}{a}$.

Gompertzova křivka

$g(x) = -\ln x$. Diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dt} = -ay\ln(y/k)$$

má řešení ve tvaru

$$y(t) = k\exp\{be^{-at}\},$$

kde $a, k > 0$, $b < 0$. Také tato funkce je rostoucí, má saturační úroveň rovnu k, ovšem funkce není symetrická kolem inflexního bodu. Tento model se používá například k vyrovnávání tabulek úmrtnosti ($(1 - y(t)) \sim$ podíl lidí dožívajících se věku t, nejde tedy o vývoj populace v čase jako výše).

2.2 Odhady parametrů růstových křivek

Funkce, které chceme prokládat daty, nejsou lineární funkcí hledaných koeficientů. Proto nelze přímo použít metodu nejmenších čtverců z kapitoly 1. Někdy je ale možné funkci přeperametrizovat tak, aby se metoda nejmenších čtverců použít dala.

Odhady parametrů exponenciální křivky

Místo rovnice (7) použijeme rovnici

$$\ln(y(t)) = at + \ln(b),$$

s neznámými parametry a a $\ln(b)$ a závislou proměnnou $\{\ln(y_{t_i})\}_{i=1}^n$.

Odhady parametrů logistické křivky pomocí upravené MNČ

Diferenciální rovnici (8) aproximujeme diferenční rovnicí

$$\frac{\Delta y_{t_i}}{\Delta t_i} = ay_{t_i}\left(1 - \frac{y_{t_i}}{k}\right),$$

a tu upravíme tak, abychom mohli odhadnout parametry a a a/k pomocí MNČ s nezávislou proměnou y_{t_i} a závislou proměnnou $\frac{\Delta y_{t_i}}{y_{t_i}\Delta t_i}$. Odhad parametru b potom dopočítáme z rovnice pro $\ln(b)$ odvozené z (9) s dosazenými odhady $\hat{a}, \hat{k}$, průměrováním přes všechna pozorovaná data.

Takto získaný odhad parametrů logistické křivky je hrubý, lze ho nicméně ještě vylepšit, opět pomocí metody nejmenších čtverců. Zavedeme novou parametrizaci

$$y(t) = \frac{d}{c + e^{-(a_1+\varepsilon)t}},$$

kde

$$a = a_1 + \varepsilon, \quad b = 1/c, \quad k = d/c, \tag{10}$$

a a_1 je původní hrubý odhad parametru a, který chceme vylepšit. Pro malé hodnoty ε lze psát $e^{-\varepsilon t} \sim 1 - \varepsilon t$. Tímto způsobem přecházíme k modelu

$$y_{t_i} \sim \frac{d}{c + e^{-a_1 t_i}(1 - \varepsilon t_i)}, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Po úpravě dostaneme model v lineárním tvaru:

$$y_{t_i} e^{-a_1 t_i} \sim d - c y_{t_i} + \varepsilon t_i y_{t_i} e^{-a_1 t_i}.$$

Metodou nejmenších čtverců dostaneme nové odhady parametrů:

$$\begin{pmatrix} d \\ c \\ \varepsilon \end{pmatrix} = (F^T F)^{-1} F^T Y,$$

kde

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -y_{t_1} & t_1 y_{t_1} e^{-a_1 t_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -y_{t_n} & t_n y_{t_n} e^{-a_1 t_n} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Y = \begin{pmatrix} y_{t_1} e^{-a_1 t_1} \\ \vdots \\ y_{t_n} e^{-a_1 t_n} \end{pmatrix}.$$

Nyní dosazením do reparametrizace (10) získáme opravené hodnoty parametrů. Tuto opravu odhadu je možné provádět opakovaně, potom dostáváme iterační postup.

Odhady parametrů logistické křivky Newton-Raphsonovou metodou

Alternativně můžeme při odhadu parametrů logistické křivky vycházet přímo z minimalizace průměrné kvadratické odchylky pozorovaných hodnot od modelu. Abychom nalezli argument minima nelineární funkce, použijeme klasickou Newtonovu metodu (opět iterativní postup).

Úkolem je nalézt minimum funkce

$$S(k, b, a) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \frac{k}{1 + b e^{-a t_i}} \right)^2.$$

Předpokládáme, že máme k dispozici počáteční hodnoty (k_0, b_0, a_0), které jsou relativně blízko skutečným parametrům, resp. skutečnému bodu minima. Tyto hodnoty můžeme získat například pomocí předchozí metody.

Myšlenka Newtonovy metody ve zkratce: $S(k, b, a)$ si rozvineme v Taylorovu řadu druhého řádu kolem bodu (k_0, b_0, a_0):

$$S(k, b, a) = S(k_0, b_0, a_0) + \nabla S(k_0, b_0, a_0)^T (k - k_0, b - b_0, a - a_0)^T + \frac{1}{2}(k - k_0, b - b_0, a - a_0) \nabla^2 S(k_0, b_0, a_0)(k - k_0, b - b_0, a - a_0)^T,$$

přičemž zbytkový člen zanedbáváme. Hledáme bod minima S, tedy bod, kde $\nabla S(k, b, a) = (0, 0, 0)^T$. Derivací obou stran a dosazením dostaneme rovnici

$$\nabla^2 S(k_0, b_0, a_0)(k - k_0, b - b_0, a - a_0)^T = -\nabla S(k_0, b_0, a_0),$$

která nám udává, jak počítat novou hodnotu iterovaných parametrů z výchozích hodnot.

Opakujeme tedy výpočet odchylek mezi hodnotami (k_n, b_n, a_n) a $(k_{n+1}, b_{n+1}, a_{n+1})$ podle vzorce

$$\nabla^2 S(k_n, b_n, a_n)(k_{n+1} - k_n, b_{n+1} - b_n, a_{n+1} - a_n)^T = -\nabla S(k_n, b_n, a_n),$$

dokud nedosáhneme požadované přesnosti.

2.3 Doplňování rezerv v dávkově definovaném penzijním fondu

Zaměstnavatel má jako benefit pro své zaměstnance penzijní fond, kam zaměstnanci platí příspěvky a odkud se jim pak vyplácí důchod. Uvažujeme spojitý model pro výši fondu.

Teoretický model

$$\frac{dV(t)}{dt} = \delta V(t) + P(t) - R(t)$$

$V(t)$ výše rezervy v čase t

$P(t)$ teoretická intenzita příspěvku do fondu

$R(t)$ intenzita vyplácení důchodu

δ intenzita úroku

Skutečný stav

$$\frac{dF(t)}{dt} = \delta F(t) + C(t) - R(t),$$

přičemž $F(0) \neq V(0)$.

$F(t)$ skutečná výše fondu

$C(t)$ skutečná intenzita příspěvků do fondu

Problém: Stanovení potřebné výše skutečných příspěvků: $C(t) = P(t) + \lambda(t)(V(t) - F(t))$ resp. stanovení $\lambda(t)$.

Odečtením rovnice teoretického modelu a rovnice popisující skutečný stav dojdeme k rovnici

$$\frac{d}{dt}(V(t) - F(t)) = \delta(V(t) - F(t)) + P(t) - C(t) = (\delta - \lambda(t))(V(t) - F(t)).$$

Řešení této rovnice je tvaru

$$V(t) - F(t) = (V(0) - F(0)) \exp\left\{-\int_0^t (\lambda(u) - \delta)\, du\right\}.$$

Označme $\overline{a}_n = \int_0^n e^{-\delta t} dt = (1 - e^{-\delta n})/\delta$ počáteční hodnotu jednotkového finančního toku odpovídající časovému intervalu $[0, n]$. Chceme, aby počáteční výchylka $V(0) - F(0)$ byla splacena za n let pevnými splátkami (konstantním finančním tokem):

$$V(0) - F(0) = \overline{a}_n (C(t) - P(t)) \qquad \text{pro} \qquad 0 \leq t \leq n.$$

Tento požadavek se dá přepsat do tvaru

$$C(t) = P(t) + \frac{V(0) - F(0)}{\overline{a}_n} \qquad \text{pro} \qquad 0 \leq t \leq n. \tag{11}$$

Tvrzení Pro $t \geq 0$ platí:

$$\exp\left\{-\int_0^t \left(\frac{1}{\overline{a}_{n-u}} - \delta\right) du\right\} = \frac{\overline{a}_{n-t}}{\overline{a}_n}.$$

Důkaz: Integrand je roven

$$\frac{1}{\overline{a}_{n-u}} - \delta = \frac{\delta}{1 - e^{-\delta(n-u)}} - \delta = \frac{\delta e^{-\delta(n-u)}}{1 - e^{-\delta(n-u)}} = -\frac{d}{du} \ln(1 - e^{-\delta(n-u)}).$$

Po integraci tedy dostáváme

$$-\int_0^t \left(\frac{1}{\overline{a}_{n-u}} - \delta\right) du = \ln \frac{1 - e^{-\delta(n-t)}}{1 - e^{-\delta n}} = \ln \frac{\overline{a}_{n-t}}{\overline{a}_n}.$$

□

Rovnost (11) je tak možné upravit do následující podoby:

$$\begin{aligned} C(t) &= P(t) + \frac{1}{\overline{a}_{n-t}} \frac{\overline{a}_{n-t}}{\overline{a}_n} (V(0) - F(0)) \\ &= P(t) + \frac{1}{\overline{a}_{n-t}} \exp\left\{-\int_0^t \left(\frac{1}{\overline{a}_{n-u}} - \delta\right) du\right\} (V(0) - F(0)). \end{aligned} \tag{12}$$

Nyní je vidět, že požadavek (11), resp. (12) je splněn, pokud volíme $\lambda(t) := 1/\overline{a}_{n-t}$.