4 Markovovy řetězce

Definice 7 *Posloupnost celočíselných náhodných veličin* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *se nazývá Markovův řetězec (markovský řetězec), jestliže*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n, \cdots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n) \tag{17}$$

pro každé $n \geq 0$, *a* $i_0, \cdots, i_n \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $P(X_n = i_n, \cdots, X_0 = i_0) > 0$.

Hodnoty n interpretujeme jako časové okamžiky, hodnoty, kterých řetězec X_n může nabývat, interpretujeme jako stavy. Množinu stavů řetězce budeme značit S.

Vztah (17) vyjadřuje markovskou vlastnost, tedy skutečnost, že výsledek v čase $n+1$ závisí pouze na stavu řetězce v čase n (stav v přítomném čase), nikoli na starší minulosti (posloupnosti realizovaných stavů před časem n).

Příklady – hody kostkou, náhodná procházka

Definice 8 *Hodnotu*

$$p_{ij}(n, n+1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

budeme nazývat pravděpodobnost přechodu ze stavu i *v čase* n *do stavu* j *v čase* $n+1$. *Markovův řetězec se nazývá homogenní, pokud hodnoty* $p_{ij} = p_{ij}(n, n+1)$ *nezávisí na hodnotě* n. *Označme* $p_i = P(X_0 = i)$, *pak* $(p_i, i \in S)$ *označuje počáteční rozdělení řetězce.*

Dále budeme předpokládat, že daný Markovův řetězec je homogenní.

Věta 3 *Nechť* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů* $S \subseteq \mathbb{Z}$, *počátečním rozdělením* $(p_i, i \in S)$ *a pravděpodobnostmi přechodu* $(p_{ij}, i, j \in S)$. *Pak*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Důkaz: Indukcí podle n. Pro $n = 0, 1$ tvrzení zřejmě platí (z definice, resp. elementárním podmíněním). Pro $n = 2$ máme podle věty o podmíněné pravděpodobnosti

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2) &= \mathbb{P}(X_0 = i_0)\mathbb{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i_0)\mathbb{P}(X_2 = i_2 | X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= p_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2},\end{aligned}$$

protože z markovské vlastnosti platí

$$\mathbb{P}(X_2 = i_2 | X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_2 = i_2 | X_1 = i_1) = p_{i_1 i_2}.$$

Podobně pro $n > 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) &= \mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1})\mathbb{P}(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= p_{i_{n-1} i_n} P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n},\end{aligned}$$

kde jsme nejdříve využili markovské vlastnosti a poté indukčního předpokladu. $\square$

Definujme si také pravděpodobnosti přechodu vyšších řádů (po více krocích):

$$p_{ij}^{(0)} = I\{i = j\}, \quad p_{ij}^{(1)} = p_{ij}, \quad p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}.$$

Tyto pravděpodobnosti se hodí zapisovat v maticovém tvaru, pak tedy pracujeme s maticí pravděpodobností přechodu (přechodovou maticí) $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\in S}$ a maticemi pravděpodobností přechodu po více krocích $\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j\in S}$.

Smysluplnost této definice pravděpodobností přechodu po více krocích ukazuje následující tvrzení.

Věta 4 *Nechť $m \geq 0$ je celé číslo, $i, j \in S$, pak $\mathbb{P}(X_{m+n} = j|X_n = i) = p_{ij}^{(m)}$.*

Důkaz: Indukcí podle m. □

Rovněž platí $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$ pro $n \geq 0$ (důkaz opět indukcí). Pravděpodobnosti přechodu vyšších řádů tedy můžeme získat jednoduše násobením matic.

Poznámka: Uvědomme si, že jak $\mathbf{P}$ tak i $\mathbf{P}^{(n)}$ jsou tzv. stochastické matice, tj. obsahují pouze čísla mezi 0 a 1 a součet každého řádku se rovná 1.

Skládání pravděpodobností přechodu ukazuje následující věta.

Věta 5 *(Chapmanova-Kolmogorova rovnost) pro všechna celá čísla $m, n \geq 0$ platí*

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

Důkaz: Použijeme rozklad uvažovaného jevu podle všech možných stavů v čase m a postupné podmiňování:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m+n)} &= \mathbb{P}(X_{m+n} = j|X_0 = i) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{m+n} = j, X_m = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{m+n} = j|X_m = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_m = k|X_0 = i) = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}. \end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme použili markovskou vlastnost a homogenitu řetězce. □

4.1 Klasifikace stavů Markovova řetězce

Definice 9 *Řekneme, že stav $j \in S$ je dosažitelný ze stavu $i \in S$, pokud existuje $n > 0$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Píšeme $i \to j$. Markovův řetězec nazveme nerozložitelným, pokud je každý stav dosažitelný z každého stavu.*

Definice 10 *Řekneme, že $\emptyset \neq C \subset S$ je uzavřená množina, pokud žádný stav vně množiny C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř množiny C.*

Věta 6 *$C \subset S$ je uzavřená množina právě tehdy, když platí $p_{jk} = 0$ pro každé $j \in C$ a $k \notin C$.*

Důkaz: Implikace zleva doprava je zřejmá. Opačnou implikaci dokážeme indukcí. Musíme ukázat, že $p_{jk}^{(l)} = 0$ pro každé $l \in \mathbf{N}$, $j \in C$ a $k \notin C$. Pro $l = 1$ to platí z předpokladu, pro $l > 1$ pišme

$$p_{jk}^{(l)} = \sum_{i\in S} p_{ji}^{(l-1)} p_{ik} = \sum_{i\in C} p_{ji}^{(l-1)} p_{ik} + \sum_{i\notin C} p_{ji}^{(l-1)} p_{ik} = \sum_{i\in C} p_{ji}^{(l-1)} \cdot 0 + \sum_{i\notin C} 0 \cdot p_{ik} = 0,$$

kde jsme v předposlední rovnosti využili indukční předpoklad. □

Věta 7 *Řetězec je rozložitelný právě tehdy, když existuje uzavřená množina $C \neq S$.*

Důkaz: Zřejmý.

Věta 8 *Markovův řetězec je rozložitelný právě tehdy, když po vhodném přečíslování stavů je matice přechodu tvaru* $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ Q & R \end{pmatrix}$, *kde P_1, R jsou čtvercové matice.*

Důkaz: Přečíslujeme stavy tak, aby nejdříve byly očíslované stavy z C. Pak snadno nahlédneme, že nová matice pravděpodobností přechodu bude mít přesně žádaný tvar. □

Definice 11 *Buď $i \in S$, potom*

$$\nu_i = \inf\{n > 0, X_n = i\}$$

se nazývá doba prvního vstupu (někdy se více hodí doba prvního návratu) řetězce do stavu i. Stav $i \in S$ se nazývá trvalý, pokud

$$P_i(\nu_i < \infty) = P(\nu_i < \infty | X_0 = i) = 1,$$

tedy řetězec, který vychází ze stavu i, se s pravděpodobností 1 vrátí do stavu i po konečně mnoha krocích. V opačném případě (kladná pravděpodobnost, že se řetězec do stavu i nikdy nevrátí) řekneme, že stav i je přechodný. Trvalý stav $i \in S$ se nazývá nulový, pokud $\mathbb{E}_i\nu_i = \infty$, a nenulový, pokud $\mathbb{E}_i\nu_i < \infty$.

Poznámka: Do trvalého stavu se Markovův řetězec s pravděpodobností 1 vrátí nekonečněkrát. Do přechodného stavu se Markovův řeězec vrátí nekonečně-krát s pravděpodobností 0.

Označme $f_i^{(n)} = P_i(\nu_i = n)$ a $f_i^{(0)} = 0$. Zřejmě stav i je trvalý právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)} = 1$. Dále platí $\mathbb{E}_i\nu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i^{(n)}$.

Poznámka: $p_{ii}^{(n)} = P_i(X_n = i) = \sum_{k=1}^{n} f_i^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$ platí pro $n \geq 1$.

Definice 12 *Stav $i \in S$ homogenního Markovova řetězce se nazývá periodický s periodou d, pokud*

$$d = NSD\{n > 0, p_{ii}^{(n)} > 0\} > 1.$$

Pokud vychází $d = 1$, říkáme, že stav $i \in S$ je aperiodický (neperiodický).
Řekneme, že dva stavy jsou stejného typu, pokud jsou oba dva trvalé/přechodné, nulové/nenulové, neperiodické/periodické se stejnou periodou.

Věta 9 *Stav $i \in S$ je trvalý právě tehdy, když $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.*

Trvalý stav $i \in S$ je nulový právě tehdy, když $p_{ii}^{(n)} \to 0$ pro $n \to \infty$.

Důkaz: Pro $x \in (0, 1)$ definujme vytvořující funkce $P(x)$, $F(x)$ posloupností $p_{ii}^{(n)}, f_i^{(n)}$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} x^n, \quad \text{a} \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} x^n.$$

Z poznámky plyne, že pro $n \geq 1$ platí

$$p_{ii}^{(n)} x^n = \sum_{k=1}^{n} f_i^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} x^n = \sum_{k=1}^{n} f_i^{(k)} x^k p_{ii}^{(n-k)} x^{n-k}$$

Sečtením této rovnosti přes $n \geq 1$ dostaneme

$$P(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_i^{(k)} x^k p_{ii}^{(n-k)} x^{n-k} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_i^{(k)} x^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} p_{ii}^{(l)} x^l \right) = F(x)P(x).$$

Platí tedy $P(x) = 1/(1 - F(x))$. Dále

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{x \to 1^-} P(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1 - F(x)} = \infty$$

nastává právě tehdy, když

$$1 = \lim_{x \to 1^-} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} = P_i(\nu_i < \infty).$$

Odtud je vidět, že stav $i \in S$ je trvalý právě tehdy, když $\sum_{i=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

Náznak důkazu druhé části* : Zbylou část důkazu pouze naznačíme. Zřejmě

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(x)}{1 - x} &= \frac{1}{1 - x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} \frac{1 - x^n}{1 - x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} (1 + \cdots + x^{n-1}) \to \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} n = \mathbb{E}_i \nu_i, \end{aligned} \tag{18}$$

pro $x \to 1^-$. Limitní přechod v (18) dostaneme z Fatouova lemmatu

$$\liminf_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} (1 + \cdots x^{n-1}) \geq \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} n,$$

a z nerovnosti $f_i^{(n)}(1 + \cdots + x^{n-1}) \leq f_i^{(n)} n$ pro $x \in (0, 1)$. Víme tedy, že trvalý stav $i \in S$ je nulový právě tehdy, když

$$\lim_{x \to 1^-} (1 - x) P(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x}{1 - F(x)} = 0.$$

Zbývá tedy ukázat, že $(\lim_{x \to 1^-} (1 - x) P(x) = 0)$ je ekvivalentní $(p_{ii}^{(n)} \to 0)$ pro $n \to \infty$. Jednu implikaci lze obdržet z Tauberovy věty, druhá je o něco (hodně) složitější. Podrobnosti a odkazy na další literaturu lze najít ve skriptech Z. Práškové a P. Lachouta: Základy náhodných procesů. □

Věta 10 *Nechť $i \to j \to i$. Pak stavy i a j jsou stejného typu. Pokud $i \to j \not\to i$, pak stav i je přechodný. V nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu.*

Věta 11 *V řetězci s konečně mnoha stavy nemohou být všechny stavy přechodné. V řetězci s konečně mnoha stavy neexistují stavy trvalé nulové.*

Definice 13 *Stav, ze kterého není dosažitelný žádný jiný stav, nazveme stavem absorbčním. Stav, který je trvalý, nenulový a neperiodický, nazveme stavem ergodickým.*

4.2 Limitní a stacionární rozdělení Markovova řetězce

V této podkapitole se podíváme na dlouhodobé chování markovského řetězce, tedy jaké je chování náhodné veličiny X_n pokud $n \to \infty$.

Definice 14 *Rozdělení $\pi = (\pi_i, i \in S)$ nazveme stacionárním, pokud platí $\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$ pro všechna $j \in S$. Maticově lze tuto soustavu rovností zapsat ve tvaru $\pi^T = \pi^T \mathbf{P}$.*
Rozdělení $\mathbf{a} = (a_i, i \in S)$ nazveme limitním, pokud pro každé $i \in S$ a každé počáteční rozdělení platí $a_i = \lim_{n\to\infty} p_i(n)$, kde $p_i(n) = \mathbb{P}(X_n = i)$.

Poznámka: Všimněte si, že na rozdíl od stacionárního rozdělení, které se vztahuje k pravděpodobnostem přechodu, se limitní rozdělení vztahuje k rozdělení celého markovského řetězce, jež je ovlivněno i počátečním rozdělením. Nicméně snadno nahlédneme, že je-li počáteční rozdělení markovského řetězce rovno stacionárnímu, pak i rozdělení řetězce ve všech následujících časech $(p_i(n), i \in S), n \in \mathbb{N}$, je rovno stacionárnímu rozdělení.

Věta 12 *Nechť existuje limitní rozdělení* $\mathbf{a}$ *řetězce $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, pak toto rozdělení je jeho stacionárním rozdělením.*

Důkaz: Zřejmě

$$p_j(n+1) = \sum_{i \in S} p_i(n) p_{ij}.$$

Podle Fatouova lemmatu

$$a_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n+1) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i\in S} p_i(n)p_{ij} \geq \sum_{i\in S} \liminf_{n\to\infty} p_i(n)p_{ij} = \sum_{i\in S} a_i p_{ij}. \tag{19}$$

Posčítáme-li předchozí nerovnosti přes $j \in S$, dojdeme k nerovnosti

$$1 = \sum_{j\in S} a_j \geq \sum_{i,j\in S} a_i p_{ij} = \sum_{i\in S} a_i \sum_{j\in S} p_{ij} = \sum_{i \in S} a_i = 1.$$

V neostré nerovnosti výše se tedy nabývá rovnosti, což dále znamená, že ve všech nerovnostech (19) musí nastávat rovnost. □

Věta 13 *V nerozložitelném řetězci existuje stacionární rozdělení právě tehdy, když všechny stavy jsou trvalé nenulové. V tom případě existuje právě jedno stacionární rozdělení. Jsou-li navíc stavy řetězce neperiodické, je stacionární rozdělení i rozdělením limitním, dokonce*

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_j \nu_j},$$

kde $\pi = (\pi_i, i \in S)$ je stacionární rozdělení a $\mathbb{E}_j\nu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$ je střední hodnota doby prvního návratu do stavu j. Jsou-li všechny stavy periodické, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_j(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \pi_j.$$

Poznámka: V konečném nerozložitelném řetězci stacionární rozdělení vždy existuje.

Stacionární rozdělení nerozložitelného řetězce necharakterizuje jen limity absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů. Charakterizuje také četnosti návratu do jednotlivých stavů, resp. čas řetězcem v jednotlivých stavech strávený.

Věta 14 *Označme*

$$N_j(n) = \sum_{k=1}^{n} I(X_k = j), \quad j \in S,$$

náhodnou veličinu udávající, kolikrát v prvních n krocích projde řetězec stavem j. V nerozložitelném řetězci s trvalými nenulovými neperiodickými stavy platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \pi_j \quad \text{s pravděpodobností 1}$$

pro každé $j \in S$.