4.3 Systém bonus-malus v pojišťovnictví

Tento systém se používá v havarijním pojištění. Systém má určitý počet tříd výše pojistného (bonusové třídy), do kterých je pojištěnec přiřazován na základě počtu škod uplatněných za pojistné období. Cílem tohoto systému je snížení heterogenity pojistného kmene, odrazení pojištěnců od uplatnění nízkých nároků a umožnění stanovení pojistného, jehož výše lépe odpovídá individuálním rizikům.

Aktuální bonusová třída pojištěnce a počet škod v daném období určí bonusovou třídu a tím i výši pojistného v dalším období. Vhodným modelem je proto homogenní markovský řetězec.

Označme $S = \{1, \cdots, k\}$ bonusové třídy a $a = (a_1, \cdots, a_k)^T$ výše pojistného jako podílnou část základu. Hodnota X_n bude označovat bonusovou třídu pojištěnce v období n, jinými slovy, řetězec $\{X_n\}$ bude v čase n ve stavu i, pokud bude pojištěnec zařazen do i-té bonusové třídy. Symbolem k_0 budeme označovat třídu, do které je pojištěnec zařazen na začátku, tedy v době příchodu do systému.

Španělský systém

$k = 5, a = \frac{1}{100}(60, 70, 80, 90, 100)^T, k_0 = 5.$

Pokud bude pojištěnec v předcházejícím období uplatňovat nárok na výplatu, přesune se v následujícím kroku do 5-té třídy, pokud nebude, posune se o třídu níže, je-li to možné.

Nechť pravděpodobnost neuplatnění žádného nároku v daném období je p. Matice přechodu mezi třídami je potom tvaru

$$P = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

Obvykle předpokládáme, že individuální riziko pojištěnce je charakterizováno rizikovým parametrem λ tak, že počet pojistných událostí j má Poissonovo rozdělení: $p_j = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}, j = 0, 1, 2, \ldots$ O výši škod Y_l budeme předpokládat, že jsou to nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny, nezávislé na hodnotě parametru λ.

Britský systém

$k = 7, a = \frac{1}{100}(33, 40, 45, 55, 65, 75, 100)^T, k_0 = 6.$

Pokud v minulém období pojištěnec neuplatňoval nárok na výplatu, posune se o jednu třídu níže, je-li to možné.

Nechť naopak v minulém období uplatňoval nárok na výplatu jednou. Pokud byl v první třídě, posune se o 3 třídy výše. Pokud byl ve druhé nebo třetí, posune se o dvě třídy. V ostatních případech se posune o jednu třídu výše, je-li to možné.

Za každý další nárok na výplatu (druhý, třetí, atd.) se pojištěnec posune ještě o dvě třídy výše. Pokud není možné, aby se pojištěnec posunul o předepsaný počet tříd, skončí v poslední třídě. Matice přechodu tak bude tvaru

$$P = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}) \\ e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}) \\ 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

Poznámka: Nechť matice pravděpodobností přechodu (homogenního markovského řetězce s konečnou množinou stavů) má kladný sloupec, potom existuje stacionární rozdělení $\pi = (\pi_i, i \in S)$, přičemž $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Střední hodnotu pojistného $\mathbb{E}C$ určíme pomocí stacionárního rozdělení. $\mathbb{E}C$ je rovna (vzhledem k základnímu pojistnému odpovídajícímu číslu 1):

$$EC = \pi_1 a_1 + \cdots + \pi_k a_k$$

Příklad: Španělský model, pravděpodobnost, že nedošlo ke škodě je $p = e^{-\lambda}$, a tedy pravděpodobnost uplatnění nároku je $1 - p = 1 - e^{-\lambda}$. Stacionární rozdělení je potom rovno

$$\pi = (p^4, p^3(1-p), p^2(1-p), p(1-p), 1-p)^T.$$

V tomto modelu můžeme počítat i další charakteristiky jako například pravděpodobnost uplatnění pojistné události.

Pravděpodobnost uplatnění pojistné události

Předpokládejme, že k uplatnění nastalé pojistné události dochází, pokud je škoda Y vyšší, než je odpovídající navýšení pojistného c v dalším roce po uplatnění. Tedy

$$\mathbb{P}(\text{uplatnění}) = \mathbb{P}(\text{uplatnění}|\text{nastává})\mathbb{P}(\text{nastává}) = \mathbb{P}(Y > c)\left(1 - e^{-\lambda}\right),$$

kde $1 - e^{-\lambda}$ je pravděpodobnost výskytu pojistné události.

Předpokládejme, že výše škody má logaritmicko-normální rozdělení s parametry μ a $\sigma^2 > 0$, tedy $\log Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pak

$$P(Y > c) = P\left(\frac{\ln Y - \mu}{\sigma} > \frac{\ln c - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln c - \mu}{\sigma}\right).$$

Výsledná pravděpodobnost uplatnění je pak rovna

$$\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln c - \mu}{\sigma}\right)\right]\left(1 - e^{-\lambda}\right).$$

Úplný model

Model můžeme rozšířit tak, aby zahrnoval různou individuální rizikovost chování jednotlivých pojištěnců, tedy každému pojištěnci bude odpovídat obecně různý parametr $\lambda \in \Lambda$ a individuální matice pravděpodobností přechodu $P(\lambda)$ na něm závisí. Obvykle se předpokládá, že rizikové parametry λ mají Γ-rozdělení popsané hustotou

$$f(\lambda) = \frac{\tau^h \lambda^{h-1}}{\Gamma(h)} \exp^{-\tau h}, \quad \lambda > 0,$$

kde h a τ jsou parametry. Ty se pro potřeby modelu odhadnou z dat o škodách pomocí momentové metody, protože střední hodnota Γ-rozdělení je rovna $\frac{h}{\tau}$ a rozptyl $\frac{h}{\tau^2}$.

Pojištěnce ještě rozvrstvíme podle doby, po kterou jsou pojištění. Označme příslušné relativní četnosti $w_1(\lambda), w_2(\lambda), \ldots, w_n(\lambda), \ldots$ Zde připouštíme, že doba pojištění a rizikovost pojištěnce se ovlivňují, například v tom smyslu, že vysoce rizikoví klienti budou typicky brzy odcházet k jiným pojišťovnám, které jim nabídnou vstřícnější podmínky. Dále označme symbolem A základní ryzí pojistné. Průměrné ryzí pojistné pojištěnce s rizikovým parametrem λ je potom

$$C(\lambda) = A \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\lambda) \sum_{j \in S} p_j(n, \lambda) a_j,$$

kde $a = (a_1, \ldots a_k)$ je stupnice bonusu.

Ve vyváženém modelu by mělo platit

$$\mathbb{E}C(\lambda) = \int_0^{\infty} C(\lambda) f(\lambda) d\lambda = \mathbb{E}N \, \mathbb{E}Y,$$

kde $\mathbb{E}N$ je průměrný počet škod a $\mathbb{E}Y$ je průměrná výše škody. Tato rovnice slouží pro určení základního ryzího pojistného A. Řekněme, že rozdělení doby, po kterou jsou pojištěnci pojištěni je geometrické nezávislé na λ:

$$w_n(\lambda) = q^{n-1}(1-q), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Průměrná doba pojištění je pak $\frac{1}{1-q}$ a platí

$$C(\lambda) = A(1-q)p(1)^T \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} P^{n-1}(\lambda) a = A(1-q)p(1)^T (I - qP(\lambda))^{-1} a,$$

kde I je jednotková matice, neboli

$$C(\lambda) = A(1-q) r_{k_0}(\lambda),$$

kde $r(\lambda)$ je řešením rovnice $(I - qP(\lambda))r(\lambda) = a$ a $r_{k_0}(\lambda)$ je řádek $r(\lambda)$ odpovídající počáteční bonusové třídě.

4.4 * Markovovy řetězce se stavy z množiny reálných čísel

Uvažujme následující lineární model

$$X_{n+1} = aX_n + \varepsilon_{n+1},$$

kde $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $N(0, \sigma^2)$, tedy s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Přechodová hustota (ze stavu x do stavu y) je hustota normálního rozdělení s parametry ax a σ^2:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(y - ax)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Přechodová hustota po k krocích pak odpovídá normálnímu rozdělení s parametry $a^k x$ a $\sum_{l=0}^{k-1} a^{2l}\sigma^2 = \sigma^2 \frac{1-a^{2k}}{1-a^2}$, tedy:

$$f^{(k)}(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\frac{1-a^{2k}}{1-a^2}}} \exp\left\{-\frac{(y - a^k x)^2}{2\sigma^2\frac{1-a^{2k}}{1-a^2}}\right\}.$$

Je-li $|a| < 1$, existuje limitní hustota f^∞ ve tvaru

$$f^\infty(y) = \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x, y) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(1 - a^2)y^2}{2\sigma^2}\right\},$$

přičemž hodnota této funkce nezávisí na x. Tato hustota je hustotou normálního rozdělení $N(0, \sigma^2/(1 - a^2))$.

Toto rozdělení je stacionární v následujícím smyslu: pokud hodnota řetězce X_0 v čase 0 má rozdělení $N(0, \sigma^2/(1 - a^2))$, pak také hodnota řetězce v čase 1 má toto rozdělení, $X_1 \sim N(0, \sigma^2/(1 - a^2))$. V tom případě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $X_n \sim N(0, \sigma^2/(1 - a^2))$.