# 5 Časové řady

Časovou řadou rozumíme posloupnost reálných náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$, přičemž indexy $t = 1, \dots, n$ interpretujeme jako časové okamžiky. Někdy však uvažujeme i nekonečné posloupnosti $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ nebo $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Obecně budeme pracovat s časovou řadou $\{X_t, t \in T\}$ pro nějakou indexovou množinu $T \subset \mathbb{Z}$. V praxi se pak jako časová řada často označuje i jedna konkrétní (pozorovaná) realizace $\{x_t, t \in T\}$ této náhodné posloupnosti.

Časová řada s nejjednodušší strukturou závislosti je tzv. striktní bílý šum. Jde o posloupnost nezávislých stejně rozdělených nedegenerovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou. Nás ovšem budou zajímat zejména náhodné posloupnosti, kde je nějaká netriviální závislost mezi veličinami odpovídajími různým časům (složkami, marginály).

Dále budeme uvažovat pouze posloupnosti, které jsou stacionární, tedy „invariantní v čase“, v silném nebo slabém smyslu.

**Definice 15** *Posloupnost náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ nazveme silně stacionární, pokud*

$$\mathcal{L}(X_{k_1}, \dots, X_{k_l}) = \mathcal{L}(X_{k_1+h}, \dots, X_{k_l+h})$$

*pro každé $k_1, \dots, k_l \in T$ a $h > 0$ takové, že $k_1 + h, \dots, k_l + h \in T$.*

**Definice 16** *Posloupnost náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ nazveme slabě stacionární, pokud*
*(a) $\mathbb{E}X_t = \mu$ pro všechna $t \in T$, tj. $\mathbb{E}X_i$ nezávisí na $i$,*
*(b) $\mathbb{E}(X_{t+k} - \mathbb{E}X)(X_t - \mathbb{E}X) = R(k)$ nezávisí na $t$.*

*Funkce $R(k), k = 0, 1, \dots,$ se nazývá autokovarianční funkce posloupnosti. Hodnota $R(0)$ pak označuje rozptyl posloupnosti. Ten je konstantní v čase. Vydělením autokovarianční funkce rozptylem obdržíme tzv. autokorelační funkci $r(k) = R(k)/R(0)$.*

Autokorelační funkce $r(k)$ tedy udává míru závislosti dvou složek náhodné posloupnosti, které odpovídají časům posunutým o $k$ jednotek.

**Příklad:** Pro striktní bílý šum platí $\mathbb{E}X_t = 0$ pro všechna $t$ a $R(k) = I(k = 0)\mathrm{var}(X_1)$. Pokud je $\mathrm{var}(X_1) < \infty$, jde o slabě stacionární posloupnost. V každém případě jde o silně stacionární posloupnost. □

**Definice 17** *Posloupnost náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ nazveme bílý šum, pokud jde o posloupnost centrovaných nekorelovaných náhodných veličin s kladným konečným rozptylem.*

Bílý šum tedy tvoří slabě stacionární posloupnost a platí $\mathbb{E}X_t = 0$ pro všechna $t$ a $R(k) = I(k = 0)\mathrm{var}(X_1)$, kde $0 < \mathrm{var}(X_1) < \infty$. Pro obyčejný bílý šum nemusí být jeho složky nezávislé či stejně rozdělené.

**Poznámka:** Pokud má silně stacionární posloupnost konečné druhé momenty, pak je slabě stacionární. Naopak, pokud je posloupnost náhodných veličin gausovská (všechna konečněrozměrná rozdělení jsou normální) a slabě stacionární, je také silně stacionární, neboť vícerozměrné normální rozdělení je jednoznačně určeno svými prvními dvěma momenty (vektorem středních hodnot a rozptylovou maticí).

## 5.1 Klouzavé průměry řádu $q$ – MA($q$)

**Definice 18** *Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tvoří bílý šum s rozptylem $\sigma^2$. Náhodnou posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nazveme posloupností klouzavých průměrů řádu $q$, pokud platí*

$$X_t = n_0\varepsilon_t + \ldots + n_q\varepsilon_{t-q}, \qquad \textit{pro každé } t \in \mathbb{Z},$$

*pro nějaké reálné koeficienty $n_0, \ldots, n_q$, kde $n_0, n_q \neq 0$.*

Takové posloupnosti označujěme jako MA($q$). Mají složitější korelační strukturu než bílý šum, složky $X_t$, $X_{t+k}$ jsou však nekorelované pro dostatečně velký rozdíl v časech $k$, konkrétně pro $k > q$.

**Příklad:** MA(1): $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$, kde $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ je bílý šum s rozptylem $\sigma^2$.
Budeme se ptát, za jakých podmínek na $\beta$ může být výsledná posloupnost stacionární, a spočítáme autokovarianční funkci. Nejprve snadno zjistíme, že

$$\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}\varepsilon_t + \beta\mathbb{E}\varepsilon_{t-1} = 0.$$

Z předpokladu nekorelovanosti $\varepsilon_t$ a $\varepsilon_{t-1}$ spočteme rozptyl:

$$R(0) = \operatorname{var} X_t = \operatorname{var} \varepsilon_t + \beta^2 \operatorname{var} \varepsilon_{t-1} = (1+\beta^2)\,\sigma^2.$$

Vynásobením definičního vztahu MA(1) hodnotou $X_{t-1}$ a spočtením střední hodnoty obdržíme rovnost pro autokovarianci, resp. autokorelaci se zpožděním 1:

$$R(1) = \mathbb{E}X_tX_{t-1} = \mathbb{E}(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-2}) = \beta \operatorname{var} \varepsilon_{t-1} = \beta\sigma^2.$$

Pro $k > 1$ dostáváme

$$R(k) = \mathbb{E}(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} + \beta\varepsilon_{t-k-1}) = 0,$$

neboť $t - 1 > t - k$ a všechny dílčí členy jsou navzájem nekorelované. Odtud dostáváme

$$r(1) = \frac{R(1)}{R(0)} = \frac{\beta\sigma^2}{(1+\beta^2)\,\sigma^2} = \frac{\beta}{1+\beta^2}.$$

Pro $k > 1$ dostaneme zřejmě $r(k) = 0$.

Závěr: Pro každou hodnotu paramеru $\beta \in \mathbb{R}$ je MA(1) posloupnost slabě stacionární. Má rozptyl $(1+\beta^2)\sigma^2$, autokorelaci se zpožděním 1 má $\beta/(1+\beta^2)$ a autokorelace s větším zpožděním jsou nulové. □

## 5.2 Autoregresní modely řádu $r$ – AR($r$)

V těchto modelech časových řad už jsou obecně všechny autokorelace nenulové a tak se v těchto náhodných posloupnostech navzájem ovlivňují složky, které jsou libovolně daleko od sebe. Samozřejmě, pokud je taková posloupnost stacionární, závislost se vzrůstajícím rozdílem v časech nutně slábne.

**Definice 19** *Nechť posloupnost* $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *tvoří bílý šum s rozptylem* $\sigma^2$*. Náhodnou posloupnost* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *nazveme autoregresní posloupností řádu* $r$*, pokud platí*

$$d_0 X_t + \ldots + d_r X_{t-r} = \varepsilon_t \tag{20}$$

*pro nějaké reálné koeficienty* $d_0, \ldots, d_r$*, kde* $d_0, d_r \neq 0$*.*

**Věta 15** *Nechť* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *je autoregresní posloupnost* $r$*-tého řádu definovaná předpisem (20) a nechť jsou všechny kořeny polynomu* $d(z) = d_0 + d_1 z + \ldots + d_r z^r$ *vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Pak tvoří* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *slabě stacionární posloupnost a náhodná veličina* $\varepsilon_t$ *je nekorelovaná se všemi* $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$

Za podmínek předchozí věty je $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ centrovaná posloupnost, neboť ze slabé stacionarity plyne

$$0 = \mathbb{E}\varepsilon_t = d_0 \mathbb{E}X_t + \ldots + d_r \mathbb{E}X_{t-r} = \left(\sum_{i=0}^{r} d_i\right) \mu.$$

Nutně tedy musí být $\mu = 0$, protože $\sum_{i=0}^{r} d_i = 0$ by znamenalo, že 1 je kořenem polynomu $d(z)$, což je ve sporu s předpokladem věty.

### Autoregresní model 1.řádu AR(1)

Model

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t.$$

odpovídá volbě $d_0 = 1, d_1 = -a$. Polynom

$$d(z) = d_0 z^0 + d_1 z^1 = 1 - az$$

má kořen v bodě $z = 1/a$. Bod $1/a$ je vně jednotkového kruhu právě tehdy, když $|a| < 1$. V tom případě je možné psát

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t = a(aX_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \ldots = a^k X_{t-k} + \sum_{l=0}^{k-1} a^l \varepsilon_{t-l} \tag{21}$$

a dokonce

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}. \tag{22}$$

Této vlastnosti se říká kauzalita (je možné vyjádřit $X_t$ jako lineární kombinaci posloupnosti $\{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots\}$, tedy pomocí „minulosti“ náhodné posloupnosti $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$). Pro model AR(1) plyne z toho, že $|a| < 1$.

Autokovarianční funkci pak můžeme snadno dostat z rovnice (22) a vlastností bílého šumu:

$$R(k) = \mathbb{E}X_t X_{t-k} = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} a^j \varepsilon_{t-k-j}\right) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} a^{k+j} a^j = \sigma^2 \frac{a^k}{1 - a^2}.$$

Pokud bychom ale neměli vyjádření (22) posloupnosti $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jako kauzálního procesu a zajímal by nás řekněme jenom rozptyl, mohli bychom za předpokladů předchozí věty postupovat i následovně.

Rovnici (21) postupně vynásobíme hodnotami $X_{t-1}$ a $\varepsilon_t$ a následně spočteme střední hodnotu obou stran. Tímto způsobem dostaneme rovnosti

$$\mathbb{E}X_t X_{t-1} = a\mathbb{E}X_{t-1}^2 + \mathbb{E}\varepsilon_t X_{t-1},$$
$$\mathbb{E}X_t \varepsilon_t = a\mathbb{E}X_{t-1}\varepsilon_t + \mathbb{E}\varepsilon_t^2.$$

Druhou z předchozích rovnic lze díky $\mathbb{E}X_{t-1}\varepsilon_t = 0$ přepsat do tvaru

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \mathbb{E}X_t\varepsilon_t = \mathbb{E}X_t(X_t - aX_{t-1}) = R(0) - aR(1).$$

Naopak první rovnici lze přepsat jako $R(1) = aR(0)$ a tedy $a = R(1)/R(0) = r(1)$. Odtud dostáváme rovnost pro rozptyl

$$R(0) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} = \frac{\sigma^2}{1-r(1)^2}.$$

### Yule-Walkerovy rovnice

Předchozí postup k určení hodnot autokovarianční funkce autoregresní posloupnosti lze použít i v případě obecné autoregresní posloupnosti, za předpokladů předchozí věty a tedy s možností využívat nekorelovanost $\varepsilon_t$ a $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$

Uvažujme autoregresní model upravený do následujícího tvaru:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_r X_{t-r} + \varepsilon_t. \tag{23}$$

Obě strany této rovnosti postupně násobíme $X_{t-1}, \cdots, X_{t-r}$ a počítáme střední hodnotu:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_t X_{t-1} &= a_1\mathbb{E}X_{t-1}^2 + \cdots + a_r\mathbb{E}X_{t-r}X_{t-1} + \mathbb{E}\varepsilon_t X_{t-1},\\
\cdots &= \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \qquad \cdots\\
\mathbb{E}X_t X_{t-r} &= a_1\mathbb{E}X_{t-1}X_{t-r} + \cdots + a_r\mathbb{E}X_{t-r}^2 + \mathbb{E}\varepsilon_t X_{t-r}.
\end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic lze přepsat maticově jako

$$\begin{pmatrix} R(0) & \cdots & R(r-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R(r-1) & \cdots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ \vdots \\ R(r) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Zde jsme opakovaně využili symetrie autokovarianční funkce $R$. Vydělením každé rovnosti hodnotou $R(0)$ dojdeme k soustavě

$$\begin{pmatrix} r(0) & \cdots & r(r-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r(r-1) & \cdots & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1) \\ \vdots \\ r(r) \end{pmatrix}.$$

Z této rovnosti můžeme vypočítat hodnoty autokorelační funkce $r(1), \ldots, r(r)$. Hodnoty $r(k)$ pro $k \geq r$ pak dostaneme z diferenční rovnice

$$r(k) - a_1 r(k-1) - \ldots a_r r(k-r) = 0,$$

kterou získáme jako výše přenásobením obou stran rovnice (23) hodnotou $X_{t-k}$, výpočtem střední hodnoty a vydělením $R(0)$.

Rovnost pro rozptyl obdržíme, když vynásobíme rovnost (23) hodnotou $\varepsilon_t$:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \mathbb{E}X_t\varepsilon_t = \mathbb{E}X_t(X_t - a_1X_{t-1} - \ldots - a_rX_{t-r}) = R(0)[1 - a_1r(1) - \ldots - a_rr(r)].$$

Platí tedy

$$\operatorname{var} X_t = R(0) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1r(1) - \ldots - a_rr(r)}.$$

Yule-Walkerovy rovnice lze ovšem použít i obráceným způsobem: k odhadu parametrů $a_i$ modelu AR(r) pro daná data. Z dat určíme odhady autokovarianční funkce $\hat{R}(0), \ldots \hat{R}(r)$, ty dosadíme do rovnice (24) a vyřešením lineární soustavy pro $(a_1, \ldots, a_r)$ spočítáme odhady koeficientů $\hat{a}_i$. Konzistenci takto získaných odhadů ukazuje následující věta.

**Věta 16** *Buď $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ autoregresní posloupnost řádu $r$ generovaná předpisem*

$$X_t = a_1X_{t-1} + \ldots + a_rX_{t-r} + \varepsilon_t,$$

*kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin se střední hodnotou $0$ a rozptylem $\sigma^2$. Nechť všechny kořeny polynomu $d(z) = d_0 + d_1z + \ldots + d_rz^r$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (máme slabě stacionární posloupnost). Označme $\hat{a}_n$ odhad metodou Yule-Walkerových rovnic založený na pozorování $X_1, \ldots, X_n$. Pak*

$$\sqrt{n}(\hat{a}_n - a) \to N(0, \sigma^2\Gamma^{-1}),\ n \to \infty, \tag{25}$$

*kde prvky čtvercové matice $\Gamma$ o rozměrech $r \times r$ jsou dány předpisem $\Gamma_{ij} = R(i-j)$. Tato konvergence platí ve smyslu konvergence v distribuci.*

**Poznámka:** Limitní vztah (25) se dá ekvivalentně přepsat do následující formy:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^r} |\, P(\sqrt{n}(\hat{a}_{n,1} - a_1) < x_1, \ldots, \sqrt{n}(\hat{a}_{n,r} - a_r) < x_r) - F_r(x_1, \ldots, x_r)| \to 0$$

pro $n \to \infty$, kde $F_r$ je sdružená distribuční funkce rozdělení $N(0, \sigma^2\Gamma^{-1})$.

Jak odhadujeme $\hat{R}(0), \ldots \hat{R}(r)$ na základě pozorování $X_1, \ldots, X_n$? Autokovarianci odhadujeme výběrovou autokovariancí

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}\left(X_{i+k} - \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n-k}X_{j+k}\right)\left(X_i - \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n-k}X_j\right).$$

Tento odhad lze použít i pro necentrovanou posloupnost. Střední hodnotu $\mu$ pak odhadujeme průměrem $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

## * ARMA modely

Modely klouzavých průměrů a autoregresních posloupností je možné kombinovat do obecnějšího modelu, tzv. ARMA modelu.

**Definice 20** *Nechť posloupnost* $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *tvoří bílý šum. Náhodná posloupnost* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *vyhovuje modelu ARMA(p,q) pro vhodná* $p, q \in \mathbb{N}$*, pokud existují posloupnosti koeficientů* $d_0, \ldots, d_p$*,* $(d_0, d_p \neq 0)$ *a* $n_0, \ldots, n_q$ $(n_0, n_q \neq 0)$ *takových, že*

$$d_0 X_t + \cdots + d_p X_{t-p} = n_0 \varepsilon_t + \cdots + n_q \varepsilon_{t-q}. \tag{26}$$

Podobně jako u autoregresních posloupností rovnice (26) definuje slabě stacionární posloupnost s nulovou střední hodnotou, pokud kořeny polynomu $d(z) = d_0 + \ldots + d_p z^p$ leží vně jednotkového kruhu a polynomy $d(z)$ a $n(z) = n_0 + \ldots + n_q z^q$ jsou nesoudělné (nemají společné kořeny).

Výpočet hodnot autokovarianční funkce v ARMA modelech či odhady koeficientů z výběrových autokovariancí probíhá u ARMA modelů obdobně jako u AR modelů.

Je na místě připomenout souvislost ARMA modelů s lineárnímy modely z kapitoly 3, rovnice (26) je totiž formálně ekvivalentní s obecnou rovnicí lineárního systému. Nyní ale určuje lineární vztah nikoli mezi nenáhodnými posloupnostmi vstupů a výstupů, ale mezi náhodnými posloupnostmi bílého šumu a ARMA procesu $X_t$.

Podmínka pro stability lineárního systému odpovídá podmínce nutné pro to, aby bylo možné náhodný proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vyjádřit jako (kauzální) součet nekonečné řady

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k}, \tag{27}$$

kde $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost koeficientů splňující $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty$. Z této podmínky na koeficienty $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ dále plyne, že je řada náhodných veličin $\sum_{k=0}^{\infty} c_k Y_{t-k}$ sčítatelná skoro jistě, v $L_2$ a tedy i v pravděpodobnosti (tedy posloupnost částečných součtů konverguje k nějaké náhodné veličině v uvedeném smyslu).

Kromě ARMA modelů se rovnice (27) používá ke konstrukci i dalších náhodných procesů. Pro úplnost tedy uvedeme ještě definice dvou pojmů, se kterými se můžete v setkat.

**Definice 21** *Buď* $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *slabě stacionární posloupnost a* $(\psi_k, k \in \mathbb{Z})$ *posloupnost koeficientů taková, že* $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi_k| < \infty$*. Potom řekneme, že posloupnost*

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k Y_{t-k}$$

*vznikla lineární filtrací z posloupnosti* $\{Y_k\}$*. Posloupnosti* $\{\psi_k\}$ *říkáme lineární filtr. Je-li* $\psi_k = 0$ *pro* $k < 0$*, pak říkáme, že jde o kauzální filtr (fyzikálně uskutečnitelný).*

**Definice 22** *Náhodnou posloupnost* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *nazveme lineárním procesem, pokud existuje posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin* $\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$ *s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem a lineární filtr* $\{\psi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *takový, že* $X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}$*. O posloupnosti* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *řekneme, že je kauzální, pokud je filtr* $\{\psi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *kauzální.*

## 5.3 Lineární predikce

V souvislosti s časovými řadami se ještě krátce zmíníme o problému predikce (předpovědi) dalších, zatím nepozorovaných hodnot v časové řadě na základě hodnot pozorovaných. Na příkladu si ukážeme, jak se odvodí nejlepší lineární predikce o jeden krok dopředu, pokud máme k dispozici pouze jednu pozorovanou hodnotu. Postup lze samozřejmě zobecnit na předpověď o více kroků dopředu nebo na předpověď na základě více než jednoho pozorování.

Úloha tedy zní takto: chceme předpovědět hodnotu náhodné veličiny $X_{t+1}$ na základě náhodné veličiny $X_t$, přičemž se omezíme jen na lineární predikce tvaru $\hat{X}_{t+1} = a + bX_t$. O posloupnosti $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ budeme předpokládat, že je slabě stacionární, a jako kritérium optimality budeme uvažovat střední kvadratickou chybu mezi $X_t$ a předpovědí $\hat{X}_{t+1}$. Řešíme tedy minimalizační problém

$$\min_{a,b} \mathbb{E}(X_{t+1} - a - bX_t)^2 = \min_{a',b} \mathbb{E}(X_{t+1} - \mu - a' - b(X_t - \mu))^2,$$

kde $a' = a + \mu(b - 1)$.

Derivováním podle parametrů $a', b$ dojdeme k nutným podmínkám pro lokální extrém:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a'} : \qquad & -2\mathbb{E}(X_{t+1} - \mu - a' - b(X_t - \mu)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial b} : \qquad & -2\mathbb{E}(X_{t+1} - \mu - a' - b(X_t - \mu))(X_t - \mu) = 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$a' = E(X_{t+1} - \mu - b(X_t - \mu)) = 0,$$

ze druhé potom obdržíme podmínku na $b$ ve tvaru

$$\mathbb{E}(X_{t+1} - \mu)(X_t - \mu) = b\mathbb{E}(X_t - \mu)^2.$$

To vede k rovnosti

$$b = \frac{R(1)}{R(0)} = r(1).$$

Výsledná predikce je pak tvaru

$$\hat{X}_{t+1} = a + bX_t = \mu + b(X_t - \mu) = \mu + r(1)(X_t - \mu),$$

kde za hodnoty $\mu, r(1)$ dosadíme příslušné odhady $\hat{\mu}, \hat{r}(1)$, pokud je máme k dispozici například z jiného úseku časové řady. Kvalitu tohoto odhadu posuzujeme pomocí střední kvadratické odchylky:

$$\begin{aligned} MSE = \mathbb{E}(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})^2 &= \mathbb{E}(X_{t+1} - \mu - r(1)(X_t - \mu))^2 \\ &= R(0)[1 + r(1)^2 - 2r(1)^2] = R(0)[1 - r(1)^2]. \end{aligned}$$

Obdobně pak řešíme modifikovanou úlohu najít nejlepší lineární předpověď $X_{t+1}$ pomocí hodnot $X_t, X_{t-1}$, tedy najít

$$\hat{X}_{t+1} = a + bX_t + cX_{t-1} = \mu + a' + b(X_t - \mu) + c(X_{t-1} - \mu)$$

tak, aby

$$\min_{a,b,c} \mathbb{E}(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})^2 = \min_{a',b,c} \mathbb{E}((X_{t+1} - \mu) - a' - b(X_t - \mu) - c(X_{t-1} - \mu))^2,$$

kde $a'$ je nyní rovno $a + \mu(b + c - 1)$.

Derivováním podle parametru $a'$ dojdeme opět k podmínce $a' = 0$. Derivováním podle zbylých dvou parametrů dojdeme k rovnostem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b}: &\quad \mathbb{E}[(X_{t+1} - \mu) - b(X_t - \mu) - c(X_{t-1} - \mu)](X_t - \mu) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial c}: &\quad \mathbb{E}[(X_{t+1} - \mu) - b(X_t - \mu) - c(X_{t-1} - \mu)](X_{t-1} - \mu) = 0. \end{aligned}$$

Tuto soustavu lze přepsat následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) \\ R(1) & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \end{pmatrix}.$$

Tato rovnice má řešení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - r(1)^2} \begin{pmatrix} 1 & -r(1) \\ -r(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Střední kvadratickou odchylku spočítáme dosazením odhadů $b, c$ do

$$MSE = \mathbb{E}\left( (X_{t+1} - \mu) - \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_t - \mu \\ X_{t-1} - \mu \end{pmatrix} \right)^2.$$

To je rovno

$$MSE = R(0) \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} r(0) & r(1) & r(2) \\ r(1) & r(0) & r(1) \\ r(2) & r(1) & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

kde za hodnoty $b, c$ dosadíme hodnoty (28).