6 Poissonův proces

Nechť $T \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Systém náhodných veličin $\{X(t), t \in T\}$ definovaných na témže pravděpodobnostním prostoru nazveme náhodným procesem.

Funkci $t \mapsto X(t)(\omega)$ pro daný elementární jev $\omega \in \Omega$ nazveme trajektorií procesu X.

Definice 23 *Řekneme, že náhodný proces $\{N(t), t \geq 0\}$ se spojitým časem je čítací proces, pokud existuje neklesající posloupnost nezávislých náhodných veličin $\xi_i, i \in \mathbb{N}$ (časů výskytu událostí), takových, že*

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I\{\xi_i \leq t\}.$$

$N(t)$ interpretujeme jako počet událostí, které nastaly do času t.

Ekvivalentně definujeme čítací proces jako proces $\{N(t), t \geq 0\}$, který má zprava spojité neklesající trajektorie, nabývá pouze celočíselných hodnot a startuje z nezáporné hodnoty, tedy $N(0) \geq 0$.

Definice 24 *Řekneme, že proces $\{N(t), t \in T\}$ má nezávislé přírůstky, pokud pro každé*

$0 \leq t_0 \leq \ldots \leq t_n, t_i \in T, i = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$, *jsou přírůstky*

$$N(t_n) - N(t_{n-1}), \ldots, N(t_1) - N(t_0)$$

procesu $\{N(t), t \in T\}$ nezávislé náhodné veličiny.

Definice 25 *Poissonovým procesem $\{N(t), t \geq 0\}$ s intenzitou $\lambda > 0$ nazveme proces splňující:*
1. $N(0) = 0$,
2. Proces má nezávislé přírůstky,
3. Přírůstky $N(t + h) - N(t)$ mají Poisonovo rozdělení s parametrem λh.

Parametr Poissonova rozdělení je úměrný délce časového intervalu, na kterém přírůstek uvažujeme, a konstanta úměrnosti je rovna intenzitě λ.

Poznámka: Protože Poissonův proces $\{N(t), t \geq 0\}$ startuje z nuly, tedy $N(0) = 0$, lze jeho hodnotu v čase t vyjádřit následujícím způsobem:

$$N(t) = N(t) - N(0) + N(0) = N(t) - N(0).$$

To je podle předpokladu náhodná veličina s Poissonovým rozdělením s parametrem λt. Platí tedy

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0, 1, \ldots$$

Věta 17 *Nechť $\{N(t), t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. Definujme posloupnost náhodných veličin $\{\xi_k, k \in \mathbb{N}\}$ předpisem*

$$\xi_k = \inf\{t \geq 0, N(t) = k\},\ k = 1, 2, \ldots$$

Pak doby mezi událostmi

$$T_k = \xi_k - \xi_{k-1},\ k = 1, 2, \dots, \quad \textit{kde} \quad \xi_0 = 0,$$

jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem λ, *tedy s hustotou*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0.$$

Důsledek: Náhodná veličina ξ_k (doba do k-té poruchy, pokud události interpretujeme jako poruchy) má Erlangovo (gama) rozdělení s parametry λ a k, tedy s hustotou

$$g_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, x^{k-1} e^{-\lambda x},\ x > 0.$$

Poznámka: Exponenciální rozdělení je tzv. rozdělení bez paměti. Pro náhodnou veličinu Y s exponenciálním rozdělením totiž platí

$$\mathbb{P}(Y > s + h | Y > s) = \mathbb{P}(Y > h).$$

Věta 18 *Nechť* $T_1, T_2, \dots$ *je posloupnost nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem* $\lambda > 0$. *Definujme* $\xi_k = \sum_{i=1}^{k} T_i$, *pak předpis*

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I\{\xi_k \le t\},\ t \ge 0, \tag{29}$$

definuje Poissonův proces s intenzitou λ.

Poznámky: Proces $\{N(t), t \ge 0\}$ definovaný v (29) je zřejmě čítací proces. Dále:

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(\xi_k \le t < \xi_{k+1}) = \mathbb{P}(\xi_k \le t) - \mathbb{P}(\xi_{k+1} \le t) = \int_0^t g_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^t g_{k+1}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^t \frac{\lambda^k}{k!} k x^{k-1} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x - \int_0^t \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\, e^{-\lambda t}.$$

V poslední rovnosti jsme použili integraci per partes. Ověření nezávislosti přírůstků je složitější a nebudeme ho tu provádět.

Příklad: Škodní události v neživotním pojištění:
Předpokládáme, že okamžiky pojistných událostí tvoří Poissonův proces $\{N(t), t \ge 0\}$ s konstantní intenzitou $\lambda > 0$ a výše škod $Y_k, k \in \mathbb{N}$, jsou navzájem nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Označme

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k,\ t \ge 0,\ T_0 = 0,$$

úhrn všech škod do času t. Počítejme střední hodnotu $S(t)$:

$$\mathbb{E}S(t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[S(t)|N(t)]) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = n)\, \mathbb{E}[S(t)|N(t) = n]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} n\, \mathbb{E}(Y_1)$$
$$= \lambda t\, \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(N(t))\, \mathbb{E}Y_1.$$

K úhradě škodních nákladů by tedy měla pojišťovna dostávat od pojištěných čisté pojistné $\lambda \mathbb{E} Y_1$ za jednotku času. $\square$

Příklad: Obslužná linka.

Představme si zařízení poskytující určitou službu – např. pokladnu v obchodě, telefonní linku pomoci zákazníkům apod. Chceme modelovat chování tohoto systému. Předpokládáme, že příchody zákazníků tvoří Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. Je-li linka obsazena, tvoří se fronta. Buď $X(t)$ počet zákazníků, kteří jsou v systému v čase t (tedy obsluhovaný zákazník plus zákazníci ve frontě). Označme

$$p_k(t) = \mathbb{P}(X(t) = k), \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

a předpokládejme, že doba trvání obsluhy jednoho zákazníka je náhodná veličina T s exponenciálním rozdělením s parametrem $\mu > 0$ a doby obsluhy pro různé zákazníky jsou nezávislé a nezávislé na procesu příchodů.

Pro chování systému platí:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{během } (t, t+h] \text{ přijde právě jeden zákazník}) = \lambda h + o(h),\\
&\mathbb{P}(\text{během } (t, t+h] \text{ nepřijde žádný zákazník}) = 1 - \lambda h + o(h),\\
&\mathbb{P}(\text{během } (t, t+h] \text{ přijde více než jeden zákazník}) = o(h).
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{obsluha skončí v } (t, t+h] \mid \text{zákazník je v čase } t \text{ obsluhován}) &= \mathbb{P}(T \in (t, t+h] | T > t)\\
&= \frac{1 - e^{-\mu(t+h)} - (1 - e^{-\mu t})}{e^{-\mu t}} = \mu h + o(h),
\end{aligned}$$

kde jsme použili Taylorův rozvoj exponenciely.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{obsluha neskončí v } (t, t+h] \mid \text{zákazník je v čase } t \text{ obsluhován}) &= \mathbb{P}(T > t+h | T > t)\\
&= \frac{e^{-\mu(t+h)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu h} = 1 - \mu h + o(h),\\
\mathbb{P}(\text{během } (t, t+h] \text{ bude ukončena obsluha více než jednoho zákazníka}) &= o(h).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathbb{P}(\text{v systému nastane během } (t, t+h] \text{ nějaká změna}) = \mu h + \lambda h + o(h),$$

neboť

$$\mathbb{P}(\text{během } (t, t+h] \text{ přijde a odejde stejné nenulové množství zákazníků}) = o(h).$$

Chceme zjistit, jak vypadá limitní chování $p_k(t)$ pro $t \to \infty$, tedy najít limitní rozdělení počtu zákazníků v systému. Pro $p_k(t)$ můžeme odvodit soustavu diferenciálních rovnic:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=2}^{\infty} p_j(t) o(h),$$

tedy

$$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -p_0(t)\lambda + p_1(t)\mu + \frac{o(h)}{h}$$

a

$$\frac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

Obdobně pro $k = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} p_k(t+h) = &\sum_{j=0}^{k-2} p_j(t)o(h) + p_{k-1}(t)(\lambda h + o(h)) + p_k(t)(1-\lambda h - \mu h + o(h)) \\ &+ p_{k+1}(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=k+2}^{\infty} p_j(t)o(h), \end{aligned}$$

takže

$$\frac{d}{dt}p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda+\mu)p_k(t) + \mu p_{k+1}(t),\ k = 1, 2, \ldots.$$

Pokud existuje $p_k(\infty) = \lim_{t\to\infty} p_k(t)$, pak pro ni platí

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_o(\infty) + \mu p_1(\infty), \\ 0 &= \lambda p_{k-1}(\infty) - (\lambda+\mu)p_k(\infty) + \ \mu p_{k+1}(\infty),\ k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Označíme-li $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, pak řešení soustavy diferenčních rovnic je

$$p_k(\infty) = \rho^k p_0(\infty),$$

a z normovací podmínky $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\infty) = 1$ dostaneme, že limitní rozdělení existuje, pokud $\rho < 1$, tedy $\lambda < \mu$, a pak

$$p_k(\infty) = (1-\rho)\rho^k.$$

Limitní rozdělení počtu zákazníků v systému je tedy geometrické s parametrem $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. $\square$