NMFM310, téma 3: lineární soustavy

Příklad 1: Rozložte na parciální zlomky racionální lomené funkce

a)

$$\frac{x-7}{x^2+x-2},$$

b)

$$\frac{x^2-7}{x^2-6x+9}.$$

Příklad 2: Určete z-transformace následujících posloupností:

a) $\{f_k\} = I(0)$,
b) $\{f_k\} = \{1\}$,
c) $\{f_k\} = \{a^k\}$,
d) $\{f_k\} = \{k\}$,
c) $\{f_k\} = \{ka^k\}$.

V následujících příkladech určete impulsní charakteristiku soustavy, přechodovou charakteristiku soustavy a rozhodněte, zda je daná soustava stabilní.

Příklad 3: Řešte lineární soustavu (tj. najděte posloupnost $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$, pro kterou platí $y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u_{t-k}$)

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \frac{1}{3}x_t + 3u_t, \\ y_t &= 2x_t - u_t, \end{aligned}$$

a) postupným dosazováním,
b) dle obecného vzorce z přednášky $H(z) = c(zI-a)^{-1}b + d$.

Příklad 4: Řešte lineární soustavu

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_t, \\ y_t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x_t + u_t. \end{aligned}$$

Příklad 5 Řěšte lineární soustavu

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_t, \\ y_t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x_t + u_t. \end{aligned}$$

Příklad 6 Řěšte lineární soustavu

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.2 & 0 \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u_t, \\ y_t &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x_t + 2u_t. \end{aligned}$$

Domácí úloha:

Zjednodušený model nabídky a poptávky

Předpokládejme, že cena zboží je v čase t rovna	$\mu + y_t,$
velikost poptávky v čase t	$D_t = \mu - by_t + \epsilon_t,$
velikost nabídky v čase t	$S_t = \mu + cy_{t-1} + \varepsilon_t,$

kde b, c, d jsou kladné konstanty.
Dále předpokládáme, že cena se v čase mění na základě následujícího modelu

$$y_t = y_{t-1} + d(D_{t-1} - S_{t-1}) + \ni_t \, . \tag{1}$$

Pak

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + d(\mu - by_{t-1} + \epsilon_{t-1} - \mu - cy_{t-2} - \varepsilon_{t-1}) + \ni_t \\ &= y_{t-1}(1 - bd) - cdy_{t-2} + u_t, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $u_t = d(\epsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-1}) + \ni_t$ je nově zadefinovaná posloupnost náhodných fluktuací. Pro tuto vstupní posloupnost platí

$$H(z) = \frac{1}{1 + (bd-1)z^{-1} + cdz^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + (bd-1)z + cd}. \tag{3}$$

Kořeny polynomu ve jmenovateli jsou

$$z_{1,2} = \frac{1 - bd \pm \sqrt{(bd-1)^2 - 4cd}}{2},$$

tedy stabilita soustavy závisí na volbě konstant b, c, d.

Zadání: Implementujte výše popsaný model. Prozkoumejte, co dělá soustava pro volbu parametrů $b = c = d = 1$, pro $b = d = 1,\ c = \frac{1}{4}$ a co pro $b = d = 1,\ c \uparrow 1$,

a) teoreticky, tedy rozhodněte, je-li soustava pro tuto volbu parametrů stabilní, určete teoretické hodnoty $\lim_{t\to\infty} g_t$.

b) simulačně: vygenerujte například posloupnost délky 100 odpovědi na:
– jednotkový impuls
– jednotkový skok
– jednotkový skok přenásobený skalárem
– posloupnost náhodných fluktuací délky např. 50 následovanou posloupností nul
– násobek předchozí posloupnosti
– posloupnost 50ti nul následovaných posloupností náhodných fluktuací
– ...

Uvědomte si, že můžete rovnou pracovat se vstupem $\{u_t\}$, nemusíte generovat všechny tři vstupní posloupnosti $\{\epsilon_t\}, \{\varepsilon_t\}, \{\ni_t\}$.

Odpovídají si teoretické předpovědi a chování simulací?

Vaše zjištění komentujte a ilustrujte na vybraných průbězích $\{u_t\}$ a $\{y_t\}$.