NMFM310, téma 4: markovské řetězce, sada 2

Příklad 1: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Klasifikujte stavy řetězce.
b) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
c) Najděte limitní rozdělení (pokud existuje).

Příklad 2: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

a) Klasifikujte stavy řetězce.
b) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).
c) Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

Příklad 3: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Určete matici pravděpodobností přechodu po dvou krocích $\mathbf{P}^{(2)}$.
b) Předpokládejme, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost). Jaké je rozdělení v čase $n = 2$?
c) Předpokládejme, že počáteční rozdělení $p = (1, 0, 0, 0)$. Jaké je rozdělení v čase $n = 2$?
d) Klasifikujte stavy řetězce.
e) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).

Příklad 4: Mějme tři přihrádky, do kterých umisťujeme kuličky. Každá přihrádka může obsahovat maximálně jednu kuličku. V každém časovém okamžiku vybereme rovnoměrně náhodně jednu z přihrádek. Pokud není obsazena, vložíme do ní kuličku. Pokud je obsazena, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ z ní kuličku odebereme a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ kuličku ponecháme. Označme X_n počet obsazených přihrádek v čase n.
a) Určete matici pravděpodobností přechodu.
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku.
d) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).
e) Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

Příklad 5: Slimák leze po nekonečně vysokém stromě, za každou hodinu s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ vyleze nahoru o jeden centimetr a s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ sklouzne dolů o jeden centimetr. Pokud je na zemi, popoleze o jeden centimetr nahoru s pravděpodobností 1. Označme X_n výšku v centimetrech, ve které se slimák nachází po n hodinách.

a) Určete matici pravděpodobností přechodu.
b) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).
c) Klasifikujte stavy řetězce.
d) Předpokládejte, že na začátku je slimák na zemi, a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po třech hodinách

Domácí úloha – simulování systému bonus-malus

a) Uvažujme verzi systému bonus-malus, který jsme pojmenovali britský systém. Předpokládáme, že počet pojistných událostí u každého klienta v daném roce má Poissonovo rozdělení s parametrem λ, a matice pravděpodobností přechodu mezi sedmi kategoriemi je pak rovna

$$P = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}) \\ e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}) \\ 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & 1-e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Určete stacionární rozdělení π pro případ $\lambda = \frac{1}{10}$.

Generujte sedm náhodných realizací řetězce délky 5 000 s maticí pravděpodobností přechodu P, pro $\lambda = \frac{1}{10}$, ze sedmi počátečních stavů $1, 2, \ldots, 7$.

Pro každý generovaný řetězec spočtěte empirické četnosti stavů $i = 1$ až 7: $N_i(5\ 000)/5\ 000$. Porovnejte (možno i graficky) obdržené empirické četnosti pro různé počáteční stavy se stacionárním rozdělením π.

Generujte 1 000 počátečních stavů podle rozdělení π a z nich generujte průběhy Markovského řetězce jako výše, ale jenom do času 10. Spočítejte četnosti stavů 1 až 7 v generované populaci pro časy $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Porovnejte, jak závisí tyto empirické četnosti na čase (opět možno graficky).

Generujte 1 000 průběhů rětězce do času 10, ale nyní všechny z počátečního stavu 6. Stejně jako v předchozím případě spočtěte četnosti stavů 1 až 7 v generované populaci pro časy $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Porovnejte, jak závisí tyto empirické četnosti na čase (opět možno graficky).

Pro obě simulace (s počátečním stavem 6 a s počátečním rozdělením rovným π) vývoje populace 1 000 pojištěnců spočtěte celkové vybrané pojistné (samozřejmě relativně k základu 100%) v časech $t = 1, 2, \ldots, 10$. Nakreslete srovnávací graf pro obě populace. Komentujte, proč graf vypadá právě takto.

b) Simulujte 10 let pojistných událostí pro populaci pojištěnců velikosti 1 000. Předpokládejte, že počet škod každého pojištěnce se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = \frac{1}{10}$ a velikost škod (vyjádřených v poměru k základu pojistného) jsou vzájemně nezávislé s lognormálním rozdělením s parametry

(i) $\mu = -0.366$ a $\sigma^2 = 2$,

(ii) $\mu = 0.327$ a $\sigma^2 = 2$.

Uvědomte si, že volby parametrů odpovídají střední hodnotě jednotlivé škody rovné cca 1.885 a 3.77 (neboť střední hodnota log-normálního rozdělení je rovna $\exp(\mu + \sigma^2/2)$), tedy střední hodnotě pojistného vybraného od jednoho pojištěnce krát 5 respektive krát 10. Rozmyslete si souvislost s průměrným počtem pojistných událostí za rok pro jednoho pojištěnce.

Nakreslete graf celkového vybraného pojistného pro případ počátečního rozdělení rovného stacionárnímu (máte z a)) a celkových škod v daných deseti letech pro případ (i) a (ii). Můžete nakreslit i kumulativní (přes prvních t let) rozdíly mezi celkovým pojistným a celkovými škodami. Komentujte.