Úloha 9.1 (o výstředním žalářníkovi)

V žaláři je vězeň odsouzený k smrti. Výstřední žalářník však dá vězni šanci.

Přinese mu 12 černých a 12 bílých kuliček. Pak mu dá dvě prázdné urny. Sdělí mu, že zítra přijde kat, náhodně si vybere jednu urnu a z ní náhodně vybere jednu kuličku. Bude-li bílá, dostane vězeň milost. V opačném případě bude ortel neprodleně vykonán.

Vězeň dá do první urny celkem n kuliček, z toho i bílých. Bez újmy na obecnosti buď $n \leq 12$, jinak můžeme zaměnit roli obou uren. Jaká je pravděpodobnost, že bude osvobozen?

K zamyšlení navíc: jak má vězeň rozdělit kuličky do uren, aby maximalizoval pravděpodobnost svého osvobození?

Úloha 9.2

Deseti bílými či černými koulemi byla urna naplněna tak, že bylo desetkrát hozeno symetrickou mincí. Padl-li rub (líc) mince, byla do urny vložena bílá (černá) koule.

Takto náhodně naplněná urna je zkoumána pomocí pokusu, který spočívá v tom, že z urny je postupně taženo n koulí, každá z nich je však po zjištění barvy do urny vrácena.

Výsledkem pokusu je zjištění, že všech n tažených koulí má bílou barvu (jev $B^{(n)}$).

Jaká je pravděpodobnost, že všechny koule v urně jsou bílé?

Úloha 9.3

V dílně pracuje 10 dělníků, kteří vyrobí za směnu stejný počet výrobků. Pět z nich vyrobí 96 % standardních, tři z nich 90 % standardních a dva 85 % standardních.

Všechny výrobky jdou do skladu. Náhodně jsme vybrali jeden výrobek a zjistili, že je standardní.

Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobil někdo z prvních pěti dělníků?

Řešení

Úloha 9.1: $\frac{1}{2}\left(\frac{i}{n}+\frac{12-i}{24-n}\right)$, dá se ukázat, že nejvýhodnější je $i=n=1$

Úloha 9.2: $\frac{1}{\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{k}{10}\right)^{n}}$