Urnové modely

Většina klasických kombinatorických úloh lze popsat pomocí losování míčků z osudí (urny). Například házení 3 kostkami lze interpretovat tak, že v osudí jsou míčky očíslovány $1, \dots, 6$ a po každém tahu vylosovaný míček vracíme.

Uvažujme osudí, ve kterém je n rozlišitelných míčků (očíslujme $1, \dots, n$), vytáhneme r míčků s tím, že po každém tahu vylosovaný míček a) vrátíme, b) nevrátíme do osudí.

Dále můžeme rozlišit, jestli nás zajímá (uspořádaný výběr) nebo nezajímá (neuspořádaný výběr) pořadí, v jakém byly míčky losovány.

Dostáváme 4 možnosti:

1. uspořádaný výběr s vracením: *variace s opakováním (r-té třídy z n prvků)*
$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_r) : \omega_i \in \{1, \dots, n\}\}, \quad |\Omega| = n^r,$$

2. neuspořádaný výběr s vracením: *kombinace s opakováním (r-té třídy z n prvků)*
$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_r) : 1 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_r \leq n\}, \quad |\Omega| = \binom{n+r-1}{r},$$
ne každá kombinace však bude stejně pravděpodobná – nemůžeme použít klasickou pravděpodobnost,

3. uspořádaný výběr bez vracení: *variace bez opakování (r-té třídy z n prvků)*
$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_r) : \omega_i \text{ po dvou různé}\}, \quad |\Omega| = n(n-1)\cdots(n-r+1),$$
spec. pro $r = n$ jde o permutace n-té třídy,

4. neuspořádaný výběr bez vracení: *kombinace bez opakování (r-té třídy z n prvků)*
$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_r) : 1 \leq \omega_1 < \dots < \omega_r \leq n\}, \quad |\Omega| = \binom{n}{r}.$$

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že druhý tažený míček bude mít číslo 1?
Řešení: Použijeme uspořádaný výběr. V případě s vracením je výsledek $n/n^2 = 1/n$, v případě bez vracení je $(n-1)/n(n-1) = 1/n$.

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že první dva vytažené míčky jsou 1 a 2?
Řešení: Pro případ s vracením je $2/n^2$ (musíme použít uspořádaný výběr). Pro případ bez vracení dostaneme $2/n(n-1)$, pokud použijeme uspořádaný výběr, nebo $1/\binom{n}{2}$, pokud použijeme neuspořádaný.