Střední hodnota

Definice: Nechť X je celočíselná náhodná veličina a $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Jestliže řada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} kp_k$ konverguje absolutně, označíme její součet symbolem $\mathbb{E}X$ a nazveme jej *střední hodnotou* náhodné veličiny X.

Pokud je X nezáporná (tj. $\mathbb{P}(X \geq 0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, neboli $p_k = 0$ pro záporná k), pak definujeme $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$. To v sobě zahrnuje případ, kdy řada diverguje, pak $\mathbb{E}X = \infty$.

Úloha 11.1 (hra Chuck-a-Luck)

Uvažujme hazardní hru, která se hraje se 3 hracími kostkami. Hráč má možnost vybrat si kterékoli z čísel $1, \ldots, 6$.

Pokud zvolené číslo nepadne ani na jedné kostce, musí zaplatit 100 korun.

Když naopak padne aspoň na jedné kostce, vyhrává vždy určitou částku, a to buď 100 korun, pokud dané číslo padlo právě jednou, 200 korun, když padlo dvakrát, nebo 300 korun, jestliže bylo dosaženo třikrát.

Jaký je střední zisk hráče z jedné takovéto hry?

Hlasovací otázka 10

V testu dostanete otázku a na výběr jsou tři možnosti. Víte, že právě jedna z nich je správná. Spolu s výběrem odpovědi máte napsat, jak moc jste si jisti (málo, středně, hodně). Bodový zisk bude určen pomocí následující tabulky.

Míra jistota	Správně	Chybně
Malá	3	2
Střední	4	1
Vysoká	5	0

Pokud vůbec netušíte, co je správně, a musíte hádat náhodně, jakou míru jistoty máte napsat, abyste maximalizovali svůj bodový zisk?

A) Malou,

B) střední,

C) vysokou,

D) nezáleží na tom.

Vlastnosti střední hodnoty

1. $\mathbb{E}a = a$ pro $a \in \mathbb{Z}$

   Důkaz: konstantu a chápeme jako náhodnou veličinu, která nabývá pouze jedné hodnoty, potom $\mathbb{E}a = a \cdot 1 = a$.

2. $\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}X$ pro $a, b \in \mathbb{Z}$

   Důkaz: Buď $Y = a + bX$.
   Pokud označníme $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, platí $\mathbb{P}(Y = a + bk) = p_k$.
   Pak $\mathbb{E}Y = \sum_k (a + bk)p_k = a + b\sum_k kp_k = a + b\mathbb{E}X$.

Vlastnosti střední hodnoty

3. $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

   Důkaz: buď $Z = X + Y$, potom
   $P(Z = m) = \sum_{k,l:k+l=m} P(X = k, Y = l)$ a střední hodnota je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Z &= \sum_m mP(Z = m) = \sum_m m \sum_{k,l:k+l=m} P(X = k, Y = l) \\
&= \sum_m \sum_{k,l:k+l=m} (k+l)P(X = k, Y = l) \\
&= \sum_{k,l} (k+l)P(X = k, Y = l) \\
&= \sum_{k,l} kP(X = k, Y = l) + \sum_{k,l} lP(X = k, Y = l) \\
&= \sum_k kP(X = k) + \sum_l lP(Y = l) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y.
\end{aligned}$$

4. $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_n$.

Úloha 11.2

Jaký je střední počet různých dnů narození ve skupině m lidí?

Obecněji můžeme řešit úlohu, jaký je střední počet obsazených (neprázdných) přihrádek, když umisťujeme r částic do n přihrádek.

Úloha 11.3

Jaká je střední hodnota náhodné veličiny s binomickým rozdělením?

Úloha 11.4

Deset lovců potkalo deset bažantů.

Každý lovec si náhodně (bez ohledu na ostatní lovce) vybral jednoho bažanta a vystřelil na něj.

Předpokládejme, že všichni lovci jsou stejně dobří, přitom pravděpodobnost, že zasáhnou bažanta, je p.

Jaký je střední počet bažantů, kteří přežijí?

Úloha 11.5 (Bernoulliova úloha)

K určitému datu bylo v nějakém městě vybráno m manželských párů stejného věku.

Po několika letech se zjistilo, že z těchto $2m$ osob jich žije jen a.

Předpokládejme, že úmrtí kterékoli osoby je stejně pravděpodobné a nezávislé na přežití či úmrtí ostatních osob.

Jaká je střední hodnota počtu manželských párů, které dosud žijí?

Tento problém řešil Daniel Bernoulli (1700–1782) v roce 1768.