## 1. cvičení

*Vyšetřete konvergenci následujících řad:*

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1},\quad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n},\quad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n,\quad 4.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}},\quad 5.\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\Big)^n$$

$$6.\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^2+1}),\quad 7.\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}.$$

*Výsledky a návody:*

1. Diverguje; Limitní srovnávací kritérium s řadou $\frac{1}{n}$.

2. Konverguje; Odmocninové kritérium $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2}=\frac{1}{2}<1$.

3. Diverguje; Není splněna nutná podmínka $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

4. Konverguje; Podílové kritérium a nerovnost $\frac{n}{2^n}\le\frac{1}{n}\to 0$.

5. Konverguje; Platí $\Big(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\Big)^n\le\Big(\frac{2}{3}\Big)^n$ a tato řada konverguje.

6. Konverguje; Rozšíříme odmocnina minus odmocnina, a pak srovnáme s řadou $\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$.

7. Konverguje; Z minulého cvičení (6. příklad) víme $\lim\frac{n^6}{e^n}=0$.

Tedy $\lim\frac{n^2}{e^{\sqrt[3]{n}}}=0\Rightarrow\exists n_0\ \forall n\ge n_0$ platí $e^{-\sqrt[3]{n}}\le\frac{1}{n^2}$ a tato řada konverguje.

## 2. cvičení

*Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad:*

$$1.\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(\log n)},\quad 2.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\text{ pro }x\in\mathbf{R},\quad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1),$$

$$4.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n},z\in\mathbf{R},\quad 5.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-100\sqrt{n}},\quad 6.\ \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}z^n\text{ pro }z\in\mathbf{R}$$

*Výsledky a návody:*

1. Konverguje neabsolutně; Leibnitzovo kritérium.

2. Konverguje absolutně pro všechna $x\in\mathbf{R}$; Podílové kritérium a $\lim\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\frac{|x|}{n+1}=0$.

3. Konverguje neabsolutně; Leibnitzovo kritérium a

$$\sum\sqrt[n]{3}-1=\sum\frac{2}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}\ldots+1}\ge\sum\frac{2}{3+3+\ldots+3}=\sum\frac{2}{3n}.$$

4. Konverguje absolutně pro $z\in(-1,1)$ a neabsolutně pro $z=1$;
Na $(-1,1)$ konverguje absolutně z podílového krit. V 1 z Leibnitze.

5. Konverguje neabsolutně; Leibnitz na $\sum\limits_{n=100}^{\infty}$ : $\frac{1}{3n-100\sqrt{n}}$ klesá pro $n\ge 100$ a konvergence nezávisí na několika prvních členech. Absolutně diverguje: Užijeme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(-1)^n|}{|3n-100\sqrt{n}|}\ge\sum_{n=100^2}^{\infty}\frac{1}{3n}.$$

6. Konverguje pro $z\in\big[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\big)$; Na $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ podílové kritérium.

V $-\dfrac{1}{4}$ a $\dfrac{1}{4}$ jsou potřeba netriviální odhady (To je těžké).

## 3. cvičení

*Vyšetřete konvergenci následujících řad a u příkladů 2, 4, 5 a 7 i absolutní konvergenci:*

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\log(\log n)}$, 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}, z\in\mathbf{R}$, 3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$, 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{3n-100\sqrt{n}}$,

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\arctan n$, 6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log^2 n}$, 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

*Výsledky a návody:*

1. Konverguje; Dirichletovo kritérium: $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}n\right)$ má omezené částečné součty.

2. Konverguje absolutně pro $z\in(-1,1)$ a neabsolutně pro $z=1$;

Na $(-1,1)$ konverguje absolutně z podílového krit. V 1 z Leibnitze.

3. Konverguje; Odmocnina mínus odmocnina na $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}$ a srovnat s $\dfrac{1}{n\log^2 n}$.

4. Konverguje neabsolutně; Dirichlet na $\displaystyle\sum_{n=100}^{\infty}$ : $\dfrac{1}{3n-100\sqrt{n}}$ klesá pro $n\geq 100$

a konvergence nezávisí na několika prvních členech. Absolutně diverguje: Užijeme

$$\sum\frac{|\cos n|}{|2n-100\sqrt{n}|}\geq\sum\frac{|\cos n|^2}{|2n-100\sqrt{n}|}=\frac{1}{2}\sum\frac{1+\cos 2n}{|2n-100\sqrt{n}|}.$$

První řada diverguje srovnáním s $\dfrac{1}{n}$ a druhá konverguje Dirichletem.

5. Konverguje neabsolutně; Abel na $a_n=\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ a $\varepsilon_n=\arctan n$.

$\varepsilon_n$ je monotónní a $\sum a_n$ konverguje z Dirichletova kritéria.

Absolutně diverguje, užij $|\sin n|\geq\sin^2 n=\dfrac{1-\cos 2n}{2}$.

6. Konverguje; Dirichletem $\displaystyle\sum\frac{\sin n}{\log^2 n}$ konverguje.

Dále $|\sin(n+\frac{1}{n})-\sin n| = 2\,|\cos(n+\frac{1}{2n})|\sin\frac{1}{2n}\leq 2\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2n}$

a $\displaystyle\sum\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log^2 n}-\frac{\sin n}{\log^2 n}\right)$ konverguje srovnáním s $\dfrac{1}{n\log^2 n}$,

a tedy konverguje i součet těchto dvou konvergentních řad.

7. Konverguje neabsolutně; Absolutně: Užijte $\sin^2 n=\dfrac{1-\cos 2n}{2}$.

Neabsolutně: Zkoumejte $\displaystyle\sum_{k\in\mathbf{N}}\left(\frac{\sin^2(2k)}{2k}-\frac{\sin^2(2k+1)}{2k+1}\right)$ – to je těžší.

## 4. cvičení

PRIDAT PRIKLADY, KDE KOMBINUJEME ZNAME LIMITY FUNKCI, L' HOSPITALA APOD A VYSETRUJEME KONVERGENCI RAD *a vyšetřete konvergenci následujících řad :*

$$1.\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n},\quad 2.\sum_{n=1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),\quad 3.\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}}-1\Big)^3.$$

*Výsledky a návody:*

1. Diverguje; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ a tedy podle Heineho $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1.$

Tedy podle limitního srovnávacího kritéria s $\frac{1}{n}$ řada diverguje.

2. konverguje; Podle Taylora $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$ a tedy $\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{\frac{1}{(\sqrt{n})^3}}{6}.$

Použijeme limitní srovnávací kritérium s $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

3. Konverguje; Upravíme $\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}}-1=e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-1=e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}-1.$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ a $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0,$ a tedy dle Heineho $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=1.$

Řada konverguje, pokud konverguje řada $\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^3}$ a ta konverguje srovnáním s $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

## 5. cvičení

*Nalezněte primitivní funkce k zadaným funkcím:*

1. $\frac{1}{2x+3}$, 2. $\frac{1}{x^2+2x+2}$, 3. $x^2\cos x$, 4. $|x|$, 5. $\frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}$, 6. $x\arctan x$,

7. $\cos^5 x\sqrt{\sin x}$, 8. $e^{ax}\cos bx$ pro $a,b\in\mathbf{R}$, 9. $\frac{\arctan e^x}{e^x}$, 10. $\frac{1}{\sin x}$ .

*Výsledky a návody:*

1. $\frac{1}{2}\log\big|x+\frac{3}{2}\big|+C$ na $\big(-\infty,-\frac{3}{2}\big)$ a na $\big(-\frac{3}{2},\infty\big)$.

2. $\arctan(x+1)+C$ na $\mathbf{R}$; $\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{(x+1)^2+1}$.

3. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$ na $\mathbf{R}$; Dvakrát per partes:

$$\int x^2\cos x=x^2\sin x-\int 2x\sin x=x^2\sin x-2(-x\cos x+\int\cos x).$$

4. $\operatorname{sgn}x\frac{x^2}{2}+C$ na $\mathbf{R}$; Nalezneme primitivní funkci na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ a v 0 spojitě slepíme.

5. $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}}-2(1+\log x)^{\frac{1}{2}}$ na $(\frac{1}{e},\infty)$; Použijte substituci $y=1+\log x$.

6. $\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{\arctan x}{2}$ na $\mathbf{R}$; $\int x\arctan x=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{1+x^2}$ a $\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$.

7. $\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{1}(\sin x)^{\frac{11}{2}}$ na intervalech $(2k\pi,\pi+2k\pi)$ pro $k\in\mathbf{N}$;

Prepište $\cos^5 x=(1-\sin^2 x)^2\cos x$ a pak použijte substituci $\sin x=y$.

8. $\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$ na $\mathbf{R}$; Zadaná funkce je spojitá, a tedy existuje její primitivní funkce. Označme tuto primitivní funkci $F_{a,b}$, pak per partes dá

$$F_{a,b}(x) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \int \frac{b}{a}e^{ax}\sin bx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}F_{a,b}(x).$$

Z této rovnice pak vypočteme $F_{a,b}(x)$.

9. $-e^{-x}\arctan e^x - \frac{1}{2}\log\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ na $\mathbf{R}$; Po per partes použijeme na $\int \frac{1}{1+e^{2x}}$ substituci $a = e^{2x}$. Za použití $\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ lehce dopočteme.

10. $\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ na $\big(k\pi,(k+1)\pi\big)$ pro $k\in\mathbf{N}$, $\frac{1}{\sin x} = 2\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$ a substituce $\tan\frac{x}{2} = y$.

## 6. cvičení

*Nalezněte primitivní funkce k zadaným funkcím:*

1. $\frac{x^3-4x-6}{x^3-5x^2+6x}$, 2. $\frac{x^{17}-5}{x^2-1}$, 3. $\frac{1}{x^4-1}$, 4. $\frac{1}{x^4+1}$, 5. $\frac{x^2+x}{x^6+3x^4+3x^2+1}$.

*Výsledky a návody:*

1. $x - \log|x| + 3\log|x-3| + 3\log|x-2|$ na $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$, $(3,\infty)$;

$$\frac{x^3-4x-6}{x^3-5x^2+6x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x-3} + \frac{3}{x-2}.$$

2. $\frac{x^{16}}{16} + \ldots + \frac{x^2}{2} + 3\log|x+1| - 2\log|x-1|$ na $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$;

$$\frac{x^{17}-5}{x^2-1} = x^{15} + x^{13} + \ldots + x^3 + x + \frac{3}{1+x} - \frac{2}{x-1}.$$

3. $\frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|1+x| - \frac{1}{2}\arctan x$ na $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$;

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

4. $$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1) +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\big(\sqrt{2}x-1\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\big(\sqrt{2}x+1\big) \text{ na } \mathbf{R};$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

5. $I_2 - I_3 - \frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)^2}$ na $\mathbf{R}$; $\frac{x^2+1-1+x}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^3} + \frac{x}{(1+x^2)^3}$

## 7. cvičení

*Nalezněte obsah plochy:*

1. Pod grafem $\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0,1)$; 6. Mezi grafy funkcí $\frac{1}{1+x^2}$ a $\frac{x^2}{2}$.

*Nalezněte primitivní funkce k zadaným funkcím:*

2. $\frac{1}{x(\log^2 x - 1)}$, 3. $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$, 4. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}$,

5. $\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}$, 7. $\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}$, 8. $\sqrt{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}}$.

*Výsledky (bez záruky) a návody:*

1. 2; Obsah $= \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \big[2\sqrt{x}\big]_0^1 = 2 - 0.$

2. $\dfrac{1}{2}\log|\log x - 1| - \dfrac{1}{2}\log|\log x + 1|$ na $(0, e^{-1}),\ (e^{-1}, e),\ (e, \infty)$;

Použijte substituci $y = \log x$ a $\dfrac{1}{y^2-1} = \dfrac{1}{2(y-1)} - \dfrac{1}{2(y+1)}$.

3. $\arctan(e^x)$ na $\mathbf{R}$; Použijte substituci $y = e^x$.

4. $-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \log|1 - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}| + \log|1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}|$ na $(-1, 0),\ (0, 1)$;

Po substituci $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ dostaneme $\dfrac{-4t^2}{1-t^4} = \dfrac{-2}{1+t^2} - \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{t+1}$.

5. $\dfrac{1}{2}(\sqrt{x^2+2x+4} - x) + \log(\sqrt{x^2+2x+4} - x + 1) + \dfrac{3}{2(\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1)}$ na $\mathbf{R}$;

Po substituci $\sqrt{x^2+2x+4} = x + t$ vyjde $\dfrac{t^2-4}{2t^2-4t+2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{3}{2(t-1)^2}$.

6. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$; Z rovnice $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{2}$ nalezneme průsečíky funkcí $\pm 1$, a tedy

Obsah $= \displaystyle\int_{-1}^1 \Big(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\Big) = \Big[\arctan x - \frac{x^3}{6}\Big]_{-1}^1 = 2\arctan(1) - 2\frac{1}{6}.$

7. $6\Big(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln\sqrt[6]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt{x}}\Big)$ na $(0, \infty)$;

Po substituci $t = \sqrt[6]{x}$ vyjde $\dfrac{6(t^6-1)}{t^4(t+1)} = 6\Big(t - 1 - \dfrac{1}{t^4} + \dfrac{1}{t^3} - \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t}\Big)$.

8. $-2\arctan\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} - \log|1 - \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}| + \log|1 + \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}|$ na $(-\infty, 0)$;

Po substituci $t = e^x$ převedeme na integrál 4.

## 8. cvičení

*Nalezněte primitivní funkce a spočtěte určité integrály:*

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x}$, 3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$, 5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}$, 6. $\displaystyle\int_0^{100\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2-\sin x}$.

2. *Nalezněte délku křivky* $y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in [0, 4]$.

4. *Nalezněte objem a obsah povrchu jednotkové koule v* $\mathbf{R}^3$.

*Výsledky a návody:*

1. $-\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{2}\log|1 - \sin x| + \dfrac{1}{2}\log|1 + \sin x|$ na $\Big(k\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{2}\Big)$ pro $k \in \mathbf{N}$;

Po substituci $a = \sin x$ vyjde $\dfrac{1}{(1-a^2)a^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2(1-a)} + \dfrac{1}{2(1+a)}$.

2. $\dfrac{8}{27}\Big(10^{\frac{3}{2}} - 1\Big)$; Délka $= \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + (\tfrac{3}{2}\sqrt{x})^2}\,dx$

a po substituci $t = 1 + \frac{9}{4}x$ dostaneme $\Big[\frac{8}{27}\big(1 + \frac{9}{4}x\big)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4$.

3. $2\pi - \dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}$; Po substituci $t = \tan x$ a rozkladu $\dfrac{t^2}{(t^2+1)(1+2t^2)} =$

$= \dfrac{-1}{1+2t^2} + \dfrac{1}{t^2+1}$ vyjde po nalepování následující primitivní funkce :

$$F(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{\sqrt2}\arctan(\sqrt2\tan x) & \text{pro } x\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ x-\frac{1}{\sqrt2}\arctan(\sqrt2\tan x)-\frac{\pi}{\sqrt2} & \text{pro } x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}] \\ x-\frac{1}{\sqrt2}\arctan(\sqrt2\tan x)-\frac{2\pi}{\sqrt2} & \text{pro } x\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]. \end{cases}$$

4. $V=\dfrac{4}{3}\pi$ a $S=4\pi$; Koule vznikne rotací funkce $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$,

kolem osy $x$. Tedy $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2=\pi\int_{-1}^1(1-x^2)\,dx$ a

$$S=2\pi\int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}=2\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)^2}=2\pi\int_{-1}^1 1\,dx.$$

5. $F(x)=\dfrac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}$ na $\Big(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\Big)\setminus\{\pi+2k\pi\}$ a $F(\pi+2k\pi)=0$;

Po substituci $t=\tan\frac{x}{2}$ vyjde $\displaystyle\int\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{-2}{1+t}$.

6. $50\frac{2\pi}{\sqrt3}+\frac{2}{\sqrt3}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt3}\tan\frac{\pi}{8}-\frac{1}{\sqrt3}\big)-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\big(-\frac{1}{\sqrt3}\big)$;

Po substituci $t=\tan\frac{x}{2}$ vyjde $\displaystyle\int\frac{1}{t^2-t+1}=\frac{2}{\sqrt3}\arctan\big(\tfrac{2}{\sqrt3}t-\tfrac{1}{\sqrt3}\big)$.

$$F(x)=\begin{cases} \frac{2}{\sqrt3}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt3}\big) & \text{pro } x\in[-\pi,\pi] \\ \frac{2}{\sqrt3}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt3}\big)+\frac{2\pi}{\sqrt3} & \text{pro } x\in[\pi,3\pi] \\ \dots & \\ \frac{2}{\sqrt3}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt3}\big)+50\frac{2\pi}{\sqrt3} & \text{pro } x\in[99\pi,101\pi]. \end{cases}$$

## 9. cvičení

*Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ jsou parametry):*

$$1.\ \int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}},\quad 2.\ \int_0^1\frac{\log x}{1-x^2}dx,\quad 3.\ \int_0^\infty\frac{x-\sin x}{x^\alpha}dx$$

$$4.\ \int_0^\infty\frac{1}{x^\alpha+x^\beta}dx,\quad 5.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)\tan^\alpha x\,dx\quad .$$

Naleznte objemy

6.jednotkov koule, 7.anuloidu

*Výsledky a návody:*

1. Konverguje ; U $\infty$ limitně srovnáme s $\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

2. Konverguje; U 1 víme $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\log x}{1-x}=1$, a proto limitně srovnáme s 1.

U 0 srovnáme s $\log x$ a $\displaystyle\int_0^1|\log x|<\infty$ zjistíme z per partes.

3. Konverguje pro $\alpha\in(2,4)$; U 0 limitně srovnáme s $\dfrac{x^3}{x^\alpha}$.

U $\infty$ (nelimitně) srovnáme s $\dfrac{x+1}{x^\alpha}$.

4. Konverguje pokud $\max\{\alpha,\beta\}>1>\min\{\alpha,\beta\}$; U 0 limitně srovnáme s $\dfrac{1}{x^{\min\{\alpha,\beta\}}}$.

U $\infty$ limitně srovnáme s $\dfrac{1}{x^{\max\{\alpha,\beta\}}}$.

5. Konverguje pro $\alpha\in(-3,1)$; U 0 limitně srovnáme s $(1-\cos x)x^\alpha\sim x^{2+\alpha}$.

U $\dfrac{\pi}{2}$ se chová jako $\dfrac{\log(\cos x)}{\cos^\alpha x}$. Vzhledem k $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=1$

je tato funkce stejně integrovatelná, jako funkce $\dfrac{\log y}{y^\alpha}$ u 0, tedy pro $\alpha < 1$.

6.$\dfrac{4}{3}\pi$; Koule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ okolo osy $x$.

$$\text{Objem je tedy } V = \pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^2 \, dx = \frac{4}{3}\pi \ .$$

7.$4\pi^2$; Uvažujme anuloid vzniklý rotací kruhu $\{[x,y] : x^2+(y-2)^2 \le 1\}$ okolo osy $x$.
Anuloid vznikne jako rozdíl tělesa vzniklého rotací $y_1 = 2+\sqrt{1-x^2}$ a tělesa $y_2 = 2-\sqrt{1-x^2}$ .

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[(2+\sqrt{1-x^2})^2 - (2-\sqrt{1-x^2})^2\right] dx = 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \ .$$

## 10. cvičení

*Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):*

$$1.\ \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{\frac{5}{2}}} dx, \quad 2.\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx, \quad 3.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Big(\frac{1}{\sin x}\Big) dx$$

$$4.\ \int_0^\infty \sin\Big(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\Big) dx, \quad 6.\ \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha(1/x)}\, dx, \quad 7.\ \int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha dx.$$

Pomocí Riemanova integrálu spočtěte

$$5.\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}, \ p > 1 \ .$$

*Výsledky a návody:*

1. Konverguje; U 0 srovnej s $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a u $\infty$ srovnej s $\dfrac{2}{x^{\frac{5}{2}}}$.

2. Konverguje ; Na $(-\infty,-1]$ a $[1,\infty)$ srovnej s $e^{-x}$ nebo limitně srovnej s $\dfrac{1}{x^2}$.
Na $[-1,1]$ je funkce spojitá .

3. Konverguje; Srovnávací kritérium a $|f(x)| \le 1$.

4. Konverguje pro $\alpha > 1$; U $\infty$ limitně srovnáme se $\sin\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}\Big) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$.
pro $\alpha > 0$ a pro $\alpha \le 0$ u $\infty$ limitně srovnáme s 1.
To konverguje pro $\alpha > 1$ a pro $\alpha > 1$ je funkce u 0 spojitá.

5. $\dfrac{1}{p+1}$; $\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{n}\Big((\dfrac{1}{n})^p + (\dfrac{2}{n})^p + \ldots + (\dfrac{n}{n})^p\Big) =$

Toto je Riemannovský součet funkce $x^p$, a tedy $\lim = \displaystyle\int_0^1 x^p \, dx = \frac{1}{p+1}$ .

6. Konverguje pro $\alpha < \dfrac{3}{2}$; U 0 se chová jako $\dfrac{1}{\log^\alpha(1/x)}$,
a tedy limitním srovnáním s $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje. U 1 limitně srovnáme s $\dfrac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}$.

7. Konverguje pro $\alpha > 1$; U 0 spojitá. U $\infty$ limitně srovnáme s $\dfrac{1}{x^\alpha}$,
neboť pomocí l'Hospitala zjistíme $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{x}} = 2$.

## 11. cvičení

1. Nalezněte obsah povrchu jednotkové koule v$\mathbf{R}^3$.
2. Nalezněte těžiště homogenního drátu tvaru půlkružnice.

*Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):*

$$3.\ \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,\quad 4.\ \int_0^\infty \frac{\sin(2x+1)}{\log(\log(10+x))}\,dx,\quad 5.\ \int_0^\infty x\cos(x^4)\,dx$$

$$6.\ \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^\alpha}\,dx,\quad 7.\ \int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}})x^\alpha\,dx,\quad 8.\ \int_0^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha}\,dx$$

*Výsledky a návody:*

1. $S = 4\pi$; Koule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$, kolem osy $x$.

$$\text{Tedy } S = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+(f')^2} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)^2} = 2\pi \int_{-1}^1 1\,dx.$$

2. $T = [0, \frac{2}{\pi}]$; Půlkružnici parametrizujeme $[x,y] = [\cos t, \sin t]$ pro $t \in [0,\pi]$.

$$\text{Délka je } \pi, \text{ a tedy } T_y = \frac{1}{\text{délka}} \int_0^\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt.$$

$$\text{Analogicky } T_x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt.$$

3. Konverguje neabsolutně ; Na $(0,1]$ limitně srovnáme s $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Na $[1,\infty)$ použijeme Dirichletovo kritérium na $f = \cos x$ a $g = \frac{1}{\sqrt{x}}$. U absolutní konvergenci odhadneme

$$\int_0^\infty \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}dx \geq \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{N}} \int_{-\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\frac{\pi}{4}+k\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}+k\pi}} = \infty$$

4. Konverguje neabsolutně ; Použijte Dirichletovo kritérium na $f = \sin(2x+1)$.

5. Konverguje neabsolutně ; Subtitucí $a = x^4$ převedeme na 1.

6. Konverguje pro $\alpha \in (0,4)$ a absolutně pro $\alpha \in (1,4)$; U 0 limitně srovnáme s $\frac{x^3}{x^\alpha}$. Na $[1,\infty)$ můžeme použít Dirichleta, neboť $\sin^3 x$ má omezenou primitivní funkci. Divergence pro $\alpha \leq 0$ se dá zjistit například pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky.

7. Konverguje pro $\alpha \in (-5,0)$ a absolutně pro $\alpha \in (-5,-1)$; Na $(0,1]$ za pomocí Taylora limitně srovnáme s $x^{4+\alpha}$. Na $[1,\infty)$ použijeme mimo jiné Dirichletovo kritérium. Divergence pro $\alpha \geq 0$ se dá zjistit napřiklad pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky.

8. Konverguje pro $0 < \alpha < 2$; Bolzano-Cauchyho podmínka dá divergenci $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ pro $\alpha \leq 0$. Z Dirichleta $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ konverguje pro $\alpha > 0$.

$$\text{Dále na } \int_1^\infty \frac{\sin x - \sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha}dx = \int_1^\infty \frac{2\sin(\frac{1}{x})\cos(x+\frac{1}{2x})}{x^\alpha}dx \text{ použij Abela.}$$

cos je omezený a $\frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{a+1}}$ konverguje. Tedy $\int_1^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha}\,dx$ konverguje právě když $\alpha > 0$. $\int_0^1 \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha}\,dx$ substitucí $y = \frac{1}{x}$ převedeme na předchozí případ.

## 12. cvičení

*Nalezněte maximální řešení následujících diferenciálních rovnic:*

$$1.\ y' = |x|,\quad 2.\ y' = yx,\quad 3.\ y' = \sqrt[3]{y},\quad 4.\ xy' - y(1+\log\tfrac{y}{x}) = 0$$

$$5.\ y' - y^2\cos x = \cos x,\quad 6.\ (1+e^x)yy' = e^x,\quad 7.\ xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$$

*Výsledky a návody:*

$$1.\ y(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+C & \text{pro } x\in(-\infty,0]\\ \frac{x^2}{2}+C & \text{pro } x\in[0,\infty)\end{cases}\quad \text{pro } C\in\mathbf{R}.$$

$$2.\ y(x)=Ce^{\frac{x^2}{2}} \text{ je řešení na } \mathbf{R} \text{ pro } C\in\mathbf{R}.$$

$$3.\ y_1(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x\in(-\infty,-\frac{3}{2}C]\\ \left(\frac{2}{3}x+C\right)^{\frac{3}{2}} & \text{pro } x\in[-\frac{3}{2}C,\infty)\end{cases}\quad \text{pro } C\in\mathbf{R} \text{ je maximální řešení,}$$

$$y_2(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x\in(-\infty,-\frac{3}{2}C]\\ -\left(\frac{2}{3}x+C\right)^{\frac{3}{2}} & \text{pro } x\in[-\frac{3}{2}C,\infty)\end{cases}\quad \text{pro } C\in\mathbf{R} \text{ je maximální řešení,}$$

a poslední maximální řešení je $y_3(x)\equiv 0$ na $\mathbf{R}$.

$$4.\ xe^{Cx} \text{ na } (0,\infty) \text{ a } (-\infty,0),\ C\in\mathbf{R};$$

Po substituci $z=\dfrac{y}{x}$ vyjde rovnice $z'x=z\log z$.

$$5.\ y(x)=\tan(\sin x+C) \text{ na intervalech, kde } \sin x+C\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;$$

Rovnici si upravíme na $\dfrac{y'}{1+y^2}=\cos x$.

$$6.\ y_1(x)=\sqrt{2}\sqrt{\log(e^x+1)+C} \text{ a } y_2(x)=-\sqrt{2}\sqrt{\log(e^x+1)+C}$$

jsou 2 řešení na $\big(\log(e^{-C}-1),\infty\big)$ pro $C<0$ a řešení na $\mathbf{R}$ pro $C\geq 0$.

$$7.\ -x\log(-\log|x|-C) \text{ na } (-e^{-C},0) \text{ a } (0,e^{-C}),\ C\in\mathbf{R};$$

Po substituci $z=\dfrac{y}{x}$ vyjde rovnice $z'x^2=xe^z$.

## 13. cvičení

*Nalezněte řešení následujících diferenciálních rovnic:*

$$1.\ y'=\frac{y}{x}+x,\quad 2.\ xy^2y'=x^2+y^3,$$

$$3.\ y'+2xy=2xy^3,\quad 4.\ y'-\frac{ny}{x+1}=(x+1)^ne^x,$$

$$5.\ xy'=4y+x^2\sqrt{y},\quad 6.\ y'-\frac{y}{(1+x^2)\arctan x}=\frac{\cos x\arctan x}{\sqrt{\sin x}},$$

$$7.\ (1-x^2)y'+xy=1 \text{ splňující } y(0)=1.$$

*Výsledky a návody:*

$$1.\ y=x^2+Cx \text{ na } (-\infty,0) \text{ a } (0,\infty) \text{ pro } C\in\mathbf{R};$$

Po substituci $y=zx$ vyjde $z'x+z=z+x$.

$$2.\ \sqrt[3]{-3x^2+Cx^3} \text{ na } (-\infty,0),(0,\tfrac{3}{C}) \text{ a } (\tfrac{3}{C},\infty) \text{ pro } C>0;$$

na $(-\infty,\frac{3}{C}),(\frac{3}{C},0)$ a $(0,\infty)$ pro $C<0$; na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ pro $C=0$.

V problémových bodech 0 a $\dfrac{3}{C}$ není $\sqrt[3]{-3x^2+Cx^3}$ diferencovatelná.

Po substituci $z=y^3$ vyjde rovnice $z'-z\dfrac{3}{x}=3x$.

$$3.\ 0 \text{ na } \mathbf{R} \text{ a } \pm\frac{1}{\sqrt{1+Ce^{2x^2}}} \text{ na } \mathbf{R} \text{ pro } C\geq 0$$

a na $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{C}},\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{C}}\right)$ pro $-1<C<0$;

Po substituci $z=\frac{1}{y^2}$ vyjde rovnice $-\dfrac{1}{2}z'+2xz=2x$.

$$4.\ e^x(1+x)^n+C(1+x)^n \text{ na } (-\infty,-1) \text{ a na } (-1,\infty) \text{ pro } C\in\mathbf{R}.$$

5. Po substituci $z = \sqrt{y}$ vyjde rovnice $z' - \dfrac{2z}{x} = \dfrac{x}{2}$.

Mechanickým postupem zjistíme, že $x^4(\frac{1}{2}\log|x| + C)^2$ je řešení.

Toto řešení je ovšem možné lepit s $y \equiv 0$ a nezapomínáme na podmínku $z \geq 0$.

Celkem: $y(x) = 0$ je řešení na $\mathbf{R}$; Dále nechť $C, C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, pak řešení jsou

$$y(x) = \begin{cases} x^4(\frac{1}{2}\log|x| - C)^2 & \text{pro } x \in (-\infty, -e^{-2C}] \\ 0 & \text{pro } x \in [-e^{-2C}, \infty) \end{cases} \text{ je řešení na } \mathbf{R}.$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, e^{-2C}] \\ x^4(\frac{1}{2}\log|x| - C)^2 & \text{pro } x \in [e^{-2C}, \infty) \end{cases} \text{ je řešení na } \mathbf{R}.$$

$$y(x) = \begin{cases} x^4(\frac{1}{2}\log|x| - C_1)^2 & \text{pro } x \in (-\infty, -e^{-2C_1}] \\ 0 & \text{pro } x \in [-e^{-2C_1}, e^{-2C_2}] \\ x^4(\frac{1}{2}\log|x| - C_2)^2 & \text{pro } x \in [e^{-2C_2}, \infty) \end{cases} \text{ je řešení na } \mathbf{R}.$$

6. $2\sqrt{\sin x}\arctan x + C\arctan x$ na $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ pro $k \in \mathbf{Z}$, $C \in \mathbf{R}$.

Integrál z $\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$ řešíme substitucí $y = \arctan x$.

Rovnici $C'(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ řešíme substitucí $t = \sin x$.

7. $x + \sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$; Obecné řešení je $x + C\sqrt{1-x^2}$.

Rovnici $C'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ řešíme substitucí $x = \sin t$.

## 14. cvičení

*U následujících diferenciálních rovnic nebo soustav diferenciálních rovnic nalezněte obecné řešení popřípadě řešení vyhovující počáteční podmínce:*

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$; 2. $y^{(4)} - y = 0$; 3. $y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y$;

4. $y'' - 6y' + 13y = 0$; 5. $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$;

7. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$; 8. $y^{(5)} + 10y'' - y' - 10y = 0$,

9. $z'' = 2z - 3w$, $w'' = z - 2w$.

*Výsledky a návody:*

1. $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$. 2. $C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x$.

3. $C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}$ . 4. $C_1e^{3x}\cos 2x + C_2e^{3x}\sin 2x$.

5. $e^x + e^{2x}$; Obecné řešení je $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Po dosazení počátečních podmínek dostaneme soustavu $2 = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2$, $3 = C_1 + 2C_2$.

6. $e^x(1+x)$; Obecné řešení je $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$.

7. $C_1x^3 + C_2\frac{1}{x}$ popřípadě $C_1x^3$ na $[0, \infty)$ a $C_2x^3$ na $(-\infty, 0)$;

Substitucí $y(x) = z(\log x)$ převedeme na rovnici

$z'' - 2z' - 3z = 0$. Ta má řešení $C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$, které snadno převedeme.

8. $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^x + e^x(C_4\cos 2x + C_5\sin 2x)$; Pokusíme se uhodnout nějaké kořeny charakteristického polynomu, a pak dělit polynom polynomem.

9. $z = 3C_1e^x + 3C_2e^{-x} + C_3\cos x + c_4\sin x$, $w = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + c_4\sin x$; Zavedeme vektor funkcí $y = [z, z', w, w']$. Z první rovnice $y_2' = 2y_1 - 3y_3$ a $y_1' = y_2$.

Z druhé rovnice $y_4' = y_1 - 2y_3$ a $y_3' = y_4$. Vyřesíme soustavu 4 rovnic .

## 16. cvičení

*Nalezněte obecné řešení následujících diferenciálních rovnic:*

$$1.\ y'' - y = 2e^x - x^2; \quad 2.\ y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}; \quad 3.\ y^{(5)} - y'' = \sin x;$$

$$4.\ y'' + y = x \sin x; \quad 5.\ 5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \sin \frac{4}{5}x.$$

*Výsledky a návody:*

$$1.\ C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.$$

2. $C_1 xe^x + C_2 e^x + e^x x \log|x|$; Partikulární řešení hledáme variací konstant ve tvaru $C_1(x)xe^x + C_2(x)e^x$. Standartním způsobem dostaneme soustavu

$$C_1' xe^x + C_2' e^x = 0 \text{ a } C_1'(e^x + xe^x) + C_2' e^x = \frac{e^x}{x}.$$

$$3.\ C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \tfrac{\sqrt{3}}{2} x + C_5 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \tfrac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x.$$

$$4.\ C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x \sin x}{4} - \frac{x^2 \cos x}{4};$$

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_0(x) = x(a + bx) \sin x + x(c + dx) \cos x$.

$$5.\ -\frac{1}{8} x e^{\frac{3}{5}x} \cos \tfrac{4}{5} x + C_1 e^{\frac{3}{5}x} \cos \tfrac{4}{5} x + C_2 e^{\frac{3}{5}x} \sin \tfrac{4}{5} x.$$