TEORETICKÉ PŘÍKLADY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

[Px] označuje běžný problém a [Tx] těžký problém.

5. Konvergence řad

[P5.1] Zkonstruujte posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ konverguje.

[P5.2] Zkonstruujte kladné posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

[P5.3] Zkonstruujte kladnou posloupnost $\{a_n\}$ tak, že

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \text{ ale } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

[P5.4] Nechť $a_n \geq 0$ je zadaná posloupnost. Rozhodněte o platnosti následujících výroků (tedy ho dokažte, nebo ukažte protipříklad):

$$A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje ;}$$

$$B) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konverguje .}$$

[T5.5] Mějme propast a libovolný počet prken délky 2 metry. Pokud položíme prkno na kraj propasti, tak se dostaneme 1 metr daleko, aniž by prkno spadlo do propasti. Dáme-li na sebe šikovně 2 prkna, tak se můžeme dostat ještě dále, aniž by se jedno nebo druhé převážilo do propasti. Kam nejdále se můžeme dostat za použití libovolného počtu prken? Dokážeme se například dostat 2 metry (nebo 5 metrů, 10 metrů) daleko a kolik v tomu případně potřebujeme prken? Prkno považujte za homogenní kvádr s těžistěm ve středu a s fixní hmotností.

[P5.6] Rozhodněte, jestli platí Leibnitzovo kritérium bez podmínky, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. Tedy jestli z $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $a_n \geq 0$ plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

[T5.7] Zkonstruujte posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ tak, že (mohou měnit znaménko!), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

6. Primitivní funkce

[P6.1] Sestrojte $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje $f(x) = F'(x)$, ale $f(x)$ není spojitá v 0.

[P6.2] Rozhodněte o platnosti následujících implikací

(i) Existuje primitivní funkce k f a g na $\mathbf{R} \Rightarrow$ Existuje primitivní funkce k $f+g$ na $\mathbf{R}$.

(ii) Existuje primitivní funkce k $f+g$ na $\mathbf{R} \Rightarrow$ Existuje primitivní funkce k f a g na $\mathbf{R}$.

[P6.3] Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a nechť $z = a + ib \in \mathbf{C}$ je jeho kořen. Dokažte, že
a) Číslo komplexně sdružené $\overline{z} = a - ib$ je také kořen P.
b) Indukcí podle k dokažte, že má-li z násobnost k, pak i $\overline{z}$ má násobnost k.

7. Určitý integrál

[P7.1] Dokažte, že Riemannova funkce

$$D(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x \in \mathbf{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ pro } p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N} \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

je Riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$.

[P7.2] Pomocí definice Riemannova integrálu spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} \quad \text{pro } p > 1.$$

[P7.3] Sestrojte omezenou funkci $f : (0,1) \to [-1,1]$, která je spojitá na $(0,1)$, ale není tam stejnoměrně spojitá.

[P7.4] Nechť $f : [0,2] \to \mathbf{R}$ je omezená a f je spojitá na $[0,1)$ i na $(1,2]$. Dokažte, že existuje $(R)\int_0^2 f(x)\,dx$.

[T7.5] Sestrojte funkce $f_k : [0,1] \to [0,\infty)$ tak, že pro každé $x \in [0,1]$ platí $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 1$, ale pro všechny $k \in \mathbf{N}$ platí $\int_0^1 f_k(x)\,dx = 1$. Tedy pro tuto posloupnost

$$1 = \lim_{k\to\infty} 1 = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

8. Diferenciální rovnice

[P8.1] Něco vymysli :)