1. Úvod

1.1. Výroky a metody důkazů

- Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé či ne.
- Vytváření nových výroků: Logické spojky & a $\vee$, Implikace $\Rightarrow$, Ekvivalence $\Leftrightarrow$, Negace $\neg$.
- Obecný kvatifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$.
- Negace výroků.

Metody důkazů tvrzení:

- Přímý důkaz: $\big(A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B\big) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.
- Nepřímý důkaz: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- Důkaz sporem: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \;\&\; \neg B)$
- Matematická indukce:
  $V(1) \;\&\; \big(\forall n \in \mathbf{N};\ V(n) \Rightarrow V(n+1)\big) \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N},\ V(n))$

Konec 1. přednášky 3.10.

1.2. Množina reálných čísel

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že M je *omezená shora* (*omezená zdola*), jestliže existuje $a \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $x \in M$ platí $x \le a$ ($x \ge a$).

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je shora omezená a neprázdná. Číslo $s \in \mathbf{R}$ nazýváme *supremem* M pokud

$$(i)\ \forall x \in M : x \le s;$$
$$(ii)\ \forall y \in \mathbf{R},\ y < s\ \exists x \in M : y < x.$$

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je zdola omezená a neprázdná. Číslo $i \in \mathbf{R}$ nazýváme *infimem* M pokud

$$(i)\ \forall x \in M : i \le x;$$
$$(ii)\ \forall y \in \mathbf{R},\ i < y\ \exists x \in M : x < y.$$

Příklady: a) $\sup[0,1] = 1$
b) $\sup(0,1) = 1$

Definice. Na množině $\mathbf{R}$ je dána relace $\le$ ($\subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$), operace sčítání $+$, operace násobení $\cdot$ a množina $\mathbf{R}$ obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí

I (i) $\forall x,y,z \in \mathbf{R}:\ x+(y+z) = (x+y)+z$	asociativita $+$
(ii) $\forall x,y \in \mathbf{R}:\ x+y = y+x$	komutativita $+$
(iii) $\forall x \in \mathbf{R}:\ x+0 = x$	existence 0
(iv) $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists -x \in \mathbf{R}:\ x+(-x) = 0$	existence opačného prvku $+$
(v) $\forall x,y,z \in \mathbf{R}:\ x(yz) = (xy)z$	asociativita $\cdot$
(vi) $\forall x,y \in \mathbf{R}:\ xy = yx$	komutativita $+$
(vii) $\forall x \in \mathbf{R}:\ x1 = x$	existence 1
$(viii)$ $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbf{R}:\ xx^{-1} = 1$	existence opačného prvku $\cdot$
(ix) $\forall x,y,z \in \mathbf{R}:\ (x+y)z = xz+yz$	distributivita
II (i) $\forall x,y \in \mathbf{R}:\ (x \le y \;\&\; y \le x) \Rightarrow x = y$	slabá antisymetrie
(ii) $\forall x,y,z \in \mathbf{R}:\ (x \le y \;\&\; y \le z) \Rightarrow x \le z$	transitivita
(iii) $\forall x,y \in \mathbf{R}:\ (x \le y) \vee (y \le x)$	dichotomie
(iv) $\forall x,y,z \in \mathbf{R}:\ x \le y \Rightarrow x+z \le y+z$	sčítání a $\le$
(v) $\forall x,y \in \mathbf{R}:\ (0 \le x \;\&\; 0 \le y \Rightarrow 0 \le xy)$	násobení a $\le$
III Je-li $M \subset \mathbf{R}$ neprázdná shora omezená množina,	pak existuje supremum M.

Věta L 1.1 (o existenci infima)**.** *Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje* $\inf M$.

Věta L 1.2 (Archimedova vlastnost)**.** *Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ tak, že $x < n$.*

Věta L 1.3 (hustota $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$)**.** *Nechť $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Pak existují $q \in \mathbf{Q}$ a $r \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ tak, že $q \in (a,b)$ a $r \in (a,b)$.*

Konec 2. přednášky 6.10.

Věta BD 1.4 (o n-té odmocnině)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $x \in [0,\infty)$. Pak existuje právě jedno $y \in [0,\infty)$ tak, že $y^n = x$.*

1.3. Krátký výlet do nekonečna

Definice. Řekneme, že množiny A, B mají *stejnou mohutnost*, pokud existuje bijekce A na B. Značíme $A \approx B$.

Řekneme, že množina A má *mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti* B, pokud existuje prosté zobrazení A do B. Značíme $A \preceq B$.

Řekneme, že množina A má *menší mohutnost* než B, pokud $A \preceq B$, ale neplatí $B \preceq A$. Značíme $A \prec B$.

Příklady: 1) $\mathbf{N} \approx \mathbf{Z}$, 2) $\mathbf{N} \approx \mathbf{Q}$, 3) $\mathbf{N} \prec \mathbf{R}$.

Tvrzení (viz proseminář). Nechť $A \preceq B$ a $B \preceq A$, pak $A \approx B$.

Tvrzení (viz proseminář). Pro každou neprázdnou množinu A platí $A \preceq \mathcal{P}(A)$, kde $\mathcal{P}(A)$ značí množinu všech podmnožin A.

Definice. Řekneme, že množina A je *konečná*, má-li konečný počet prvků.

Řekneme, že množina A je *spočetná*, jestliže $A \approx \mathbf{N}$, nebo je A konečná.

Řekneme, že množina A je *nespočetná*, jestliže $\mathbf{N} \prec A$.

Tvrzení. Nechť A_n, $n \in \mathbf{N}$, jsou spočetné množiny. Pak $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná.

Příklady: 1) $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \{[n_1, n_2] : n_1, n_2 \in \mathbf{N}\}$ je spočetná.
2) $\mathbf{Q}^k = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \ldots \times \mathbf{Q}$ je spočetná pro $k \in \mathbf{N}$.

Konec 3. přednášky 10.10.

2. Posloupnosti

2.1. Úvod

Definice. Jestliže ke každému $n \in \mathbf{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbf{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$ je *posloupnost* reálných čísel.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je *omezená*, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená podmnožina $\mathbf{R}$. Analogicky definijeme *omezenost shora* a *omezenost zdola.*

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je:
neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n \leq a_{n+1}$,
nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n \geq a_{n+1}$,
klesající, jestliže $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n > a_{n+1}$,
rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbf{N}\ a_n < a_{n+1}$.

2.2. Vlastní limita posloupnosti

Definice. Nechť $A \in \mathbf{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekneme, že A je *(vlastní) limitou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbf{N}\ : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n \to \infty} a_n = A$.

Příklady: Z definice ukažte
a) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$,
b) $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ neexistuje,
c) pro každé $A \in \mathbf{R}$ je limita konstantní posloupnosti $\lim_{n \to \infty} A = A$.

Věta L 2.1 (jednoznačnost vlastní limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta L 2.2 (o omezenosti konvergentní posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ má vlastní limitu. Pak je $\{a_n\}$ omezená.*

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $b_k = a_{n_k}$.

Věta L 2.3 (o limitě vybrané posloupnosti)**.** *Nechť $\lim_{n \to \infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ a nechť $\{b_k\}$ je vybraná a $\{a_n\}$. Pak $\lim_{k \to \infty} b_k = A$.*

Konec 4. přednášky 13.10.

Věta T 2.4 (aritmetika limit)**.** *Nechť $\lim_{n \to \infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim_{n \to \infty} b_n = B \in \mathbf{R}$. Pak platí*

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n + b_n = A + B$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n b_n = AB$

(iii) pokud $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $B \neq 0$, pak $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

Příklady: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$
c) Obecně neplatí

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

například

$$0 = \lim_{n\to\infty}(-1)^n + (-1)^{n+1} \neq \lim_{n\to\infty}(-1)^n + \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}.$$

Věta L 2.5 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}$.
(i) *Jestliže* $A < B$, *pak existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n < b_n$.
(ii) *Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \geq b_n$, *pak* $A \geq B$.

Konec 5. přednášky 17.10.

Věta L 2.6 (o dvou strážnících)**.** *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti splňující:*
(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq b_n$,
(ii) $\lim a_n = \lim b_n = A \in \mathbf{R}$.
Pak $\lim c_n = A$.

Příklady: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$,
c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,
d) pro každé $a > 0$ je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Věta L 2.7 (o limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a* $\{b_n\}$ *je omezená. Pak* $\lim a_n b_n = 0$.

Příklad: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že poloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ má *(nevlastní) limitu* $+\infty$ (respektive $-\infty$), pokud :

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbf{N} :\ a_n > K$$
$$(\forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbf{N} :\ a_n < K).$$

Příklad: $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

Věty 2.1, 2.3, 2.5 a 2.6 platí i v případě, že uvažujeme nevlastní limity.

Definice. *Rozšířená reálná osa* je množina $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ s následujícími vlastnostmi:

Uspořádání:	$\forall a \in \mathbf{R}$	$-\infty < a < \infty$
Absolutní hodnota:		$\lvert +\infty\rvert = \lvert -\infty\rvert = +\infty$
Sčítání:	$\forall a \in \mathbf{R}^* \setminus \{+\infty\}$	$-\infty + a = -\infty$
	$\forall a \in \mathbf{R}^* \setminus \{-\infty\}$	$+\infty + a = +\infty$
Násobení:	$\forall a \in \mathbf{R}^*,\ a > 0$	$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
	$\forall a \in \mathbf{R}^*,\ a < 0$	$a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
Dělení:	$\forall a \in \mathbf{R}$	$\dfrac{a}{\pm\infty} = 0.$

Výrazy $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\text{cokoli}}{0}$ nejsou definovány.

Poznámka: *Rozšířená definice* sup *a* inf*:*.
Je-li $A \neq \emptyset$ shora neomezená, tak definujme $\sup A = \infty$.
Je-li $A \neq \emptyset$ zdola neomezená, tak definujme $\inf A = \infty$.
Pro prázdnou množinu $A = \emptyset$ definujme $\sup A = -\infty$ a $\inf A = \infty$.

Věta L 2.4 (aritmetika limit podruhé)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}^*$. *Pak platí*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$, *pokud je výraz* AB *definován*

(iii) *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *a* $B \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$,

pokud je výraz $\dfrac{A}{B}$ *definován.*

Příklady: a) $\lim_{n\to\infty}(n+1)-n=1$ a $\lim_{n\to\infty}(n+2)-n=2$, tedy limita typu $\infty-\infty$ může být cokoliv.
b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$, ale $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}}$ neexistuje.

Věta L 2.8 (limita typu $A/0$)**.** *Nechť $\lim_{n\to\infty}a_n=A\in\mathbf{R}^*$, $A>0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ a existuje $n_0\in\mathbf{N}$, že pro každé $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_0$ platí $b_n>0$. Pak $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$.*

Konec 6. přednášky 16.10.

2.4. Hlubší věty o limitách

Věta L 2.9 (o limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Příklad: a) Nechť $a_1=10$ a $a_{n+1}=6-\frac{5}{a_n}$. Spočtěte $\lim_{n\to\infty}a_n$.
b) Toto nelze aplikovat mechanicky - viz $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$.

Věta L 2.10 (Cantorův princip vložených intervalů)**.** *Nechť $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

$$(i)\ [a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n] \text{ pro každé } n\in\mathbf{N},$$
$$(ii)\ \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

Pak je množina $\bigcap_{n=1}^\infty[a_n,b_n]$ jednobodová.

Věta T 2.11 (Bolzano-Weirstrass)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost a označme $b_n=\sup\{a_k;\ k\geq n\}$ a $c_n=\inf\{a_k;\ k\geq n\}$. Je-li $\{a_n\}$ shora (zdola) neomezená, pak klademe $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ ($\lim_{n\to\infty}c_n=-\infty$). Číslo $\lim_{n\to\infty}b_n$ nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a značíme $\limsup_{n\to\infty}a_n$. Číslo $\lim_{n\to\infty}c_n$ nazýváme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a značíme $\liminf_{n\to\infty}a_n$.

Příklad: $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n=1$ a $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n=-1$.
Konec 7. přednášky 24.10.

Věta T 2.12 (vztah limity, limes superior a limes inferior)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel a $A\in\mathbf{R}^*$. Pak*

$$\lim a_n=A\in\mathbf{R}^*\Leftrightarrow\limsup_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n=A\in\mathbf{R}^*.$$

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel a $A\in\mathbf{R}^*$. Řekneme, že A je *hromadná hodnota* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, jestliže existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ z $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tak, že $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=A$. Množinu hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\}_{n=1}^\infty)$.

Příklad: $H(\{(-1)^n\}_{n\in\mathbf{N}})=\{-1,1\}$; $H(\{\sin(\frac{\pi}{2}n)\}_{n\in\mathbf{N}})=\{-1,0,1\}$.

Věta T 2.13 (o hromadných hodnotách posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup_{n\to\infty}a_n$ a $\liminf_{n\to\infty}a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ a pro každou hromadnou hodnotu $A\in\mathbf{R}^*$ této posloupnosti platí*

$$\liminf_{n\to\infty}a_n\leq A\leq\limsup_{n\to\infty}a_n.$$

Důsledky: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel a $A\in\mathbf{R}^*$. Pak
a) $H(\{a_n\}_{n=1}^\infty)\neq\emptyset$;
b) $\liminf_{n\to\infty}a_n=\min H(\{a_n\}_{n=1}^\infty)$ a $\limsup_{n\to\infty}a_n=\max H(\{a_n\}_{n=1}^\infty)$;
c) je-li $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, pak $H(\{a_n\}_{n=1}^\infty)=\{A\}$.
Konec 8. přednášky 27.10.

Věta T 2.14 (BC podmínka)**.** *Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ má vlastní limitu, právě když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbf{N}\ \forall m,n\in\mathbf{N},\ n\geq n_0,\ m\geq n_0:\quad|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

3. Funkce jedné reálné proměnné - limita a spojitost

3.1. Základní definice

Definice. *Funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení $f:M\to\mathbf{R}$, kde $M\subset\mathbf{R}$.

Definice. Řekneme, že funkce $f:M\to\mathbf{R}$, $M\subset\mathbf{R}$, je

rostoucí, jestliže $\forall x,y\in M,\ x<y:\quad f(x)<f(y)$,

klesající, jestliže $\forall x,y\in M,\ x<y:\quad f(x)>f(y)$,

nerostoucí, jestliže $\forall x,y\in M,\ x<y:\quad f(x)\geq f(y)$,

neklesající, jestliže $\forall x,y\in M,\ x<y:\quad f(x)\leq f(y)$.

Definice. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, je

sudá, jestliže $\forall x \in M : \quad (-x \in M)\&(f(x) = f(-x))$,

lichá, jestliže $\forall x \in M : \quad (-x \in M)\&(f(x) = -f(-x))$,

periodická, jestliže $\exists p > 0,\ \forall x \in M : \quad (x + p \in M)\&(x - p \in M)\&(f(x) = f(x + p))$.

Definice. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, je *omezená* (*omezená shora, omezená zdola), jestliže $f(M)$ je omezená (shora omezená, zdola omezená) podmnožina* $\mathbf{R}$.

Definice. Nechť $\delta > 0$ a $a \in \mathbf{R}$. *Prstencové okolí* bodu je

$$P(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}; \quad P(+\infty,\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad P(-\infty,\delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé prstencové okolí bodu a je

$$P_+(a,\delta) = (a, a+\delta); \quad P_-(a,\delta) = (a-\delta, a).$$

Okolí bodu je

$$B(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta); \quad B(+\infty,\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad B(-\infty,\delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé okolí bodu a je

$$B_+(a,\delta) = [a, a+\delta); \quad B_-(a,\delta) = (a-\delta, a].$$

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbf{R}^*$ *limitu* rovnou $A \in \mathbf{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta) : \quad f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Značíme $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Poznámky: 1) Pro $a \in \mathbf{R}$ a $A \in \mathbf{R}$ lze $\lim_{x\to a} f(x) = A$ definovat jako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} : \ f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

2) $\lim_{x\to a} f(x) = A$ lze ekvivalentně zapsat

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ f(P(a,\delta)) \subset B(A,\varepsilon).$$

Příklady: 1) $\lim_{x\to a} x = a$.
2) $\lim_{x\to a} c = c$ pro libovolnou konstantu $c \in \mathbf{R}$.
Konec 9. přednášky 31.10.

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ *limitu zprava (zleva)* rovnou $A \in \mathbf{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a,\delta) : \quad f(x) \in B(A,\varepsilon)$$
$$\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(a,\delta) : \quad f(x) \in B(A,\varepsilon)\big).$$

Značíme $\lim_{x\to a+} f(x) = A$ ($\lim_{x\to a-} f(x) = A$).

Příklady: 1) $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ a $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$.
2) $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ a $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Poznámka:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x) = A \text{ a } \lim_{x\to a-} f(x) = A.$$

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je v a *spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva)*, jestliže

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ (\lim_{x\to a+} f(x) = f(a), \ \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)).$$

Příklady: 1) Funkce $f(x) = x$ je spojitá na $\mathbf{R}$.
2) Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

není nikde spojitá.
3) Riemannova funkce

$$D(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x \in \mathbf{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ pro } p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N} \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

je spojitá na $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

3.2. Věty o limitách

Věta T 3.1 (Heine)**.** *Nechť $A \in \mathbf{R}^*$, $f : M \to \mathbf{R}$ a f je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbf{R}^*$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

$$(i)\ \lim_{x\to a} f(x) = A$$

$$(ii)\ \text{pro každou posloupnost } \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ takovou, že}$$
$$x_n \in M,\ \forall n \in \mathbf{N}\ x_n \neq a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ platí } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Příklad: $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ neexistuje.

Věta L 3.2 (o jednoznačnosti limity)**.** *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Příklad (motivační): Spojité úročení a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$.
Konec 10. přednášky 3.11.

Věta L 3.3 (limita a omezenost)**.** *Nechť f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbf{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že f je na $P(a,\delta)$ omezená.*

Věta L 3.4 (o aritmetice limit)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$. Pak platí*

$$(i)\ \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A + B, \text{ pokud je výraz } A+B \text{ definován}$$
$$(ii)\ \lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB, \text{ pokud je výraz } AB \text{ definován}$$
$$(iii)\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ pokud je výraz } \frac{A}{B} \text{ definován.}$$

Důsledek Věty 3.4: Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbf{R}$. Pak jsou funkce $f+g$, $f \cdot g$ spojité v a. Pokud je navíc $g(a) \neq 0$, pak je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v a.

Speciálně polynomy jsou spojité na $\mathbf{R}$ a racionální lomené funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jsou spojité ve všech x, kde $Q(x) \neq 0$.

Věta L 3.5 (limita a uspořádání)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.*
(i) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje prstencové okolí $P(a,\delta)$ tak, že

$$\forall x \in P(a,\delta): \quad f(x) > g(x).$$

(ii) Nechť existuje prstencové okolí bodu $P(a,\delta)$ tak, že

$$\forall x \in P(a,\delta): \quad f(x) \le g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

(iii) Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(a,\delta)$ platí $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje $\lim_{x\to a} h(x)$ a všechny tři limity se rovnají.

Příklad: $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$.
Konec 11. přednášky 7.11.

Věta T 3.6 (limita složené funkce)**.** *Nechť funkce f a g splňují:*

$$(i)\ \lim_{x\to c} g(x) = A,$$
$$(ii)\ \lim_{y\to A} f(y) = B.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

$$(S)\ f \text{ je spojitá v } A,$$
$$(P)\ \exists \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq A,$$

pak platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Příklady: 1) $f(x) = \sqrt{x}$ je spojitá na $(0,\infty)$.
2) $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^2} = 1$.
3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1$.
4) Pro $g(x) \equiv 0$ a $f(x) = 1$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$ věta o limitě složené funkce neplatí.

Důsledek Věty 3.6: Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jsou spojité funkce. Pak je funkce $f(g(x))$ také spojitá.

Věta L 3.7 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť f je monotónní na intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$. Potom existuje* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *i* $\lim_{x\to b-} f(x)$.

Věta T 3.8 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}^*$ a $\delta_0 > 0$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní limita* $\lim_{x\to a} f(x)$ *právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzano-Cauchyova) podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P(a, \delta) :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

3.3. Funkce spojité na intervalu

Definice. Vnitřními body intervalu J rozumíme ty body z J, které nejsou krajními.

Definice. Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je spojitá na J, jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech J. Je-li počáteční bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě a je-li koncový bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zleva v tomto bodě.

Konec 12. přednášky 10.11.

Věta T 3.9 (Darboux)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) = y$.*

Důsledek. Nechť J je interval. Nechť funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je spojitá. Pak je $f(J)$ interval.

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$

maxima na M jestliže $\forall x \in M :$ $\quad f(x) \leq f(a)$,
minima na M jestliže $\forall x \in M :$ $\quad f(x) \geq f(a)$,
ostrého maxima na M jestliže $\forall x \in M,\ x \neq a :$ $\quad f(x) < f(a)$,
ostrého minima na M jestliže $\forall x \in M,\ x \neq a :$ $\quad f(x) > f(a)$,

lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima, lokálního minima), jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že f nabývá na $M \cap B(a, \delta)$ svého maxima (ostrého maxima, ostrého minima, minima).

Věta T 3.10 (spojitost funkce a nabývaní extrémů)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabýva na $[a, b]$ svého maxima a minima.*

Důsledek. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak je funkce f na $[a, b]$ omezená.

Definice. Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je prostá na J, jestliže pro všechna $x, y \in J$ platí $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Pro prostou funkci $f : J \to \mathbf{R}$ definujeme funkci $f^{-1} : f(J) \to \mathbf{R}$ předpisem $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Konec 13. přednášky 14.11.

Věta T 3.11 (o inverzní funkci)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom je funkce f^{-1} spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

Příklad: Funkce $x \to x^n$ je spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$, a proto je funkce $x \to \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$.

3.4. Elementární funkce

Věta T 3.12 (zavedení exponenciely - zatím BD)**.** *Existuje funkce* exp : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *splňující:*

a) $\exp(x)$ *je rostoucí na* $\mathbf{R}$,
b) $\forall x, y \in \mathbf{R} \quad \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,
c) $\exp(0) = 1$,
d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$,
e) $\exp(x)$ *je spojitá na* $\mathbf{R}$.

Příklad: Číslo e je iracionální.

Konec 14. přednášky 21.11.

Definice. Funkci inverzní k exponenciele exp je *logaritmus* log.

Věta T 3.13 (vlastnosti logaritmu)**.** *Funkce* log *splňuje:*

a) $\log : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ *je spojitá rostoucí funkce*,
b) $\forall x, y > 0 \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x - 1} = 1$.

Definice. Nechť $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$. Pak definujeme $a^b = \exp(b \log(a))$. Je-li $b > 0$ pak definujeme $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$.

Příklad: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ a $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{p}{n})^n = e^p$.

Věta BD 3.14 (zavedení sinu a cosinu)**.** *Existují funkce* $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *a* $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *splňující:*

$$\begin{aligned} a)\ \forall x, y \in \mathbf{R} \quad & \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ & \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ & \cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x, \end{aligned}$$

b) existuje kladné číslo π *tak, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{1}{2}\pi]$ *a* $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$,

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Příklad: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Definice. Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ a $y \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ definujeme funkce *tangens* a *cotangens* předpisem

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ a } \operatorname{cotg} y = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Věta L 3.15 (spojitost sinu a cosinu)**.** *Funkce* $\sin$, $\cos$, $\tan$ *a* cotg *jsou spojité na svém definičním oboru.*

Konec 15. přednášky 24.11.

Definice. Nechť

$$\begin{aligned} \sin^* x &= \sin x \text{ pro } x \in [\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \\ \cos^* x &= \cos x \text{ pro } x \in [0, \pi], \\ \tan^* x &= \tan x \text{ pro } x \in (\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \text{ a} \\ \operatorname{cotg}^* x &= \operatorname{cotg} x \text{ pro } x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Definujeme arcsin (respektive arccos, arctan, arccotg) jako inverzní funkci k funkci $\sin^*$ (respektive $\cos^*$, $\tan^*$, cotg^*).

4. Funkce jedné reálné proměnné - derivace a Taylorův polynom

4.1. Derivace funkce

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak *derivací* f *v bodě* a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f *v bodě* a *zprava* budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f *v bodě* a *zleva* budeme rozumět

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámky:

$$1)\ f'(a) \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní } f'(a) \in \mathbf{R} \\ \text{nevlastní } f'(a) = \pm\infty \end{cases} \\ \text{neexistuje} \end{cases}$$

2) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
3) $f'(a) = A \Leftrightarrow \big(f'_+(a) = A$ a $f'_-(a) = A\big)$.

Příklady: 1) derivace $|x|$
2) derivace $\operatorname{sgn} x$
3) $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Věta L 4.1 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť má funkce* f *v bodě* $a \in \mathbf{R}$ *derivaci* $f'(a) \in \mathbf{R}$. *Pak je* f *v bodě* a *spojitá.*

Věta T 4.2 (aritmetika derivací)**.** *Nechť $f'(a)$ a $g'(a)$ existují.*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *pokud má pravá strana smysl.*

(ii) Nechť je g spojitá v a, pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

pokud má pravá strana smysl.

(iii) Nechť je g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$,

pokud má pravá strana smysl.

Konec 16. přednášky 28.11.

Věta T 4.3 (derivace složené funkce)**.** *Nechť f má derivaci v bodě y_0, g má derivaci v x_0 a je v x_0 spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

je-li výraz vpravo definován.

Příklad: Zderivujte e^{x^2+x} a x^a pro $x > 0$.

Věta L 4.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je na intervalu (a,b) spojitá a rostoucí (respektive klesající). Nechť f má v bodě $x_0 \in (a,b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

Poznámka: a) Věta platí i v případě $f'(x_0) = 0$ jsou-li splněny ostatní předpoklady. Pak $(f^{-1})'(y_0) = \infty$ pro rostoucí f a $(f^{-1})'(y_0) = -\infty$ pro klesající f.
b) Věta platí i v případě $f'(x_0) = \infty$ (resp. $f'(x_0) = -\infty$) jsou-li splněny ostatní předpoklady. Pak $(f^{-1})'(y_0) = 0$.

Derivace elementárních funkcí:

$(const)' = 0$ $\qquad$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$

$(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0,\infty)$ $\qquad$ $(e^x)' = e^x$

$(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0,\infty),\ a \in \mathbf{R}$ $\qquad$ $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbf{R},\ a \in (0,\infty)$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Konec 17. přednášky 1.12.

Věta L 4.5 (Fermatova)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$ je bod lokálního extrému funkce f na M. Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.*

Typická úloha: Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$, nalezněte její maximum a minimum.

Podle Věty 3.10 spojitá f na $[a,b]$ nabývá maxima a minima. Podle předchozí věty toto minimum musí být v bodech množiny

$$\{x \in (a,b) :\ f'(x) \text{ neexistuje}\} \cup \{x \in (a,b) :\ f'(x) = 0\} \cup \{a,b\}.$$

Věta L 4.6 (Rolleova věta)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a,b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.*

Věta L 4.7 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a,b). Pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důsledek: Nechť $f'(x) = 0$ pro všechny $x \in (a,b)$. Pak f je na (a,b) konstatní.

Definice. Nechť J je interval. Množinu všech vnitřních bodů J nazýváme *vnitřek* J a značíme $\operatorname{int} J$.

Věta L 4.8 (o vztahu derivace a monotonie)**.** *Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J má derivaci.*

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f nerostoucí na J.

Konec 18. přednášky 5.12.

Věta T 4.9 (Cauchyova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ takové, že f má v každém bodě (a, b) derivaci a g má v každém bodě vlastní derivaci různou od nuly. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta T 4.10 (l'Hospitalovo pravidlo)**.**
(i) Nechť $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ a nechť existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) Nechť $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$ a nechť existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Konec 19. přednášky 8.12.
Příklady: 1) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log^a n}{n^b}$ pro $a, b > 0$.

Varovné příklady: 1) $\lim_{x\to 0} \frac{1+2x}{1+3x} \neq \frac{2}{3}$
2) $\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+2\sin x} \neq \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+2\cos x}$

Věta L 4.11 (derivace a limita derivace)**.** *Nechť je funkce f spojitá zprava v a a nechť existuje $\lim_{x\to a+} f'(x) = A \in \mathbf{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.*

Příklady: Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce $|\arctan(x-1)|$ na $\mathbf{R}$.

4.2. Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a nechť f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $n+1$-*ní derivací* funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Definice. Funkce f na intervalu I nazveme *konvexní (konkávní)*, jestliže

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Funkci nazveme *ryze konvexní (ryze konkávní)*, jsou-li příslušné nerovnosti ostré.

Poznámka: Ekvivalentně lze definovat, že funkce f je na I konvexní, pokud

$$\forall x, y \in I,\ x < y,\ \forall \alpha \in (0,1) \text{ platí } f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Lemma. *Nechť je funkce f je na intervalu I konvexní, pak*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Lemma'. *Nechť je funkce f je na intervalu I ryze konvexní, pak*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Konec 20. přednášky 12.12.

Věta L 4.12 (vztah druhé derivace a konvexity (konkávity)). *Nechť f má na intervalu (a,b) spojitou první derivaci.*

$$\textit{Jestliže } \forall x \in (a,b):\ f''(x) > 0,\ \textit{pak } f \textit{ je ryze konvexní.}$$
$$\textit{Jestliže } \forall x \in (a,b):\ f''(x) < 0,\ \textit{pak } f \textit{ je ryze konkávní.}$$
$$\textit{Jestliže } \forall x \in (a,b):\ f''(x) \geq 0,\ \textit{pak } f \textit{ je konvexní.}$$
$$\textit{Jestliže } \forall x \in (a,b):\ f''(x) \leq 0,\ \textit{pak } f \textit{ je konkávní.}$$

Věta T 4.13 (konvexita a jednostranné derivace). *Nechť f je konvexní na intervalu J a $a \in \operatorname{int} J$. Pak $f'_+(a) \in \mathbf{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.*

Příklad: Funkce $f(x) = |x|$ je na $[-1,1]$ konvexní, ale neexistuje $f'(0)$.

Věta L 4.14 (konvexita a spojitost). *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak je f spojitá na J.*

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x,y];\ x \in \mathbf{R},\ y = f(a) + f'(a)(x-a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$, $x \in D_f$ leží *nad (pod) tečnou* T_a, jestliže platí

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad \big(f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)\big).$$

Definice. Funkce f má v bodě a inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbf{R}$ a existuje $\Delta > 0$ tak, že

$$(i)\ \forall x \in (a-\Delta, a):\ [x, f(x)] \text{ leží nad tečnou,}$$
$$(ii)\ \forall x \in (a, a+\Delta):\ [x, f(x)] \text{ leží pod tečnou,}$$

nebo

$$(i)\ \forall x \in (a-\Delta, a):\ [x, f(x)] \text{ leží pod tečnou,}$$
$$(ii)\ \forall x \in (a, a+\Delta):\ [x, f(x)] \text{ leží nad tečnou,}$$

Věta T 4.15 (nutná podmínka pro inflexi). *Nechť $f''(a) \neq 0$. Pak a není inflexní bod funkce f.*

Příklad: Funkce $f(x) = x^4$ splňuje $f''(0) = 0$, ale v 0 není inflexní bod.

Konec 21. přednášky 15.12.

Věta T 4.16 (postačující podmínka pro inflexi). *Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b). Nechť $z \in (a,b)$ a platí*

$$\forall x \in (a,z): f''(x) > 0 \ \text{ a } \ \forall x \in (z,b): f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod f.

4.3. Průběh funkce

Definice. Řekneme, že funkce $ax+b$, $a,b \in \mathbf{R}$, je *asymptotou funkce f v ∞ (resp. $-\infty$)*, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0 \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0).$$

Věta L 4.17 (tvar asymptoty). *Funkce f má v ∞ asymptotu $ax+b$, právě když*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R} \ \text{ a } \ \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax\big) = b \in \mathbf{R}.$$

Poznámka: Věta platí analogicky i u $-\infty$.

Při vyšetření průběhu funkce provádíme následující kroky:
1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicita.
4. Dopočítáme limity v 'krajních bodech definičního oboru'.
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

Konec 22. přednášky 19.12.

4.4. Taylorův polynom

Motivace: Chceme nahradit komplikovanou funkci polynomem s co největší přesností. Lze aplikovat například při přibližném řešení diferenciálních rovnic, nebo při integrování. Používá se i v informatice při reprezentaci funkcí na počítači, nebo na kalkulačce.

Definice. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbf{R}$ a existuje vlastní n-tá derivace f v bodě a. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovým polynomem řadu n funkce f v bodě a.*

Poznámky: a) pro stupeň Taylorova polynomu platí $\operatorname{st} T_n^{f,a} \le n$.
b) $(T_n^{f,a})'(x) = T_{n-1}^{f',a}(x)$.

Věta T 4.18 (o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem). *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

Lemma. *Nechť Q je polynom, $a \in \mathbf{R}$,* $\operatorname{st} Q \le n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak $Q \equiv 0$.

Věta T 4.19 (Taylor). *Nechť funkce f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a,x]$, a nechť ϕ je spojitá funkce v $[a,x]$ a má vlastní derivaci v (a,x), která je v každém bodě tohoto intervalu různá od nuly. Pak existuje $\xi \in (a,x)$ tak, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\phi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důsledek: (Lagrangeův tvar zbytku). Speciálně existuje $\xi_1 \in (a,x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_1)(x-a)^{n+1}.$$

Důsledek: (Cauchyův tvar zbytku). Speciálně existuje $\xi_2 \in (a,x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_2)(x-\xi_2)^n(x-a).$$

Příklad: Spočtěte $e^{0,1}$ s chybou menší než 10^{-5}.
Konec 24. přednášky 22.12.

4.5. Symbol o a Taylorovy řady elementárních funkcí

Taylorovy řady elementárních funkcí: Platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ a } (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Příklad: Platí $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Odvození vzorce pro $\cos(x+y)$ a $\sin(x+y)$. Moivrova formule.

Definice. Nechť f, g jsou funkce a $a \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a *malé o od g*, jestliže platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Píšeme $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$.

Teoretické příklady: a) Taylorova věta nám říká, že $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
b) Nechť $k, l \in \mathbf{N}$. Dokažte, že pro $x \to 0$ platí

$$(i)\ x^k o(x^l) = o(x^{k+l}), \quad (ii)\ o(x^k)o(x^l) = o(x^{k+l})$$

$$(iii)\ o(x^k) + o(x^l) = o(x^{min\{k,l\}}), \quad (iv)\ o(x^k + o(x^l)) = o(x^k) \text{ pro } k < l.$$

Příklady: a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
b) Nalezněte a, $b \in \mathbf{R}$ tak, aby limita existovala vlastní limita $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)e^x - ax - bx^2}{x^3}$ a tuto limitu spočtěte.
c) Nalezněte $T_3^{f,0}(x)$ pro $f(x) = e^{\sin x}$.
Konec 25. přednášky 5.1.

Na přednášce jsme si ukázali řešení vzorové písemky.

Příklad pro zajímavost: Existuje funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, která zobrazí libovolný interval na $\mathbf{R}$.

Konec 26. přednášky 8.1.