5. Řady

5.1. Úvod

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ nazveme *m-tým částečným součtem* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Součtem* nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je *konvergentní.* Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je *divergentní.* Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje.
2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverguje.
3) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje pro $|q| < 1$.

Motivace: 1) Rozvoj funkce do řady - Taylorův polynom.
2) Cena akcie v závislosti na výši dividendy a očekávaném výnosu.

Věta L 5.1 (nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Varování: Z $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ neplyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Věta L 5.2 (konvergence součtu řad)**.** (*i*) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, *pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \textit{ konverguje }.$$

(*ii*) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \textit{ konverguje a } \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

5.2. Řady s nezápornými členy

Pozorování: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

Věta L 5.3 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tak, že pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $a_n \leq b_n$. *Pak*

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$
$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ diverguje.}$$

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$ konverguje.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ diverguje.

Věta L 5.4 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A \in \mathbf{R}^*$. *Pak*

$$(i) \textit{ Jestliže } A \in (0,\infty), \textit{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$
$$(ii) \textit{ Jestliže } A = 0, \textit{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje,}$$
$$(ii) \textit{ Jestliže } A = \infty, \textit{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje.}$$

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3n}$ diverguje.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ konverguje.

Konec 1. přednášky 20.2.

Věta L 5.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

$$(i)\ \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iv) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje},$$

$$(v) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje},$$

Poznámka: 1) Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, tak o konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze nic říct. Například $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ konverguje.
Z této konvergence a Věty 3.1. plyne, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$.

Věta L 5.6 (d'Alambertovo podílové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

$$(i)\ \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje}.$$

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro každé $x > 0$.

Věta T 5.7 (kondenzační kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy splňující* $a_{n+1} \leq a_n$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$. *Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \textit{ konverguje.}$$

Důsledek. Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

$$(ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n} \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Konec 2. přednášky 23.2.

5.3. Neabsolutní konvergence řad

Definice. Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konveguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Věta L 5.8 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro konvergenci řad). *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall m, n \in \mathbf{N},\ m \geq n \geq n_0 :\ \left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon.$$

Věta L 5.9 (vztah konvergence a absolutní konvergence). *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Důsledky. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

$$(1)\text{ Pokud } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

$$(2)\text{ Pokud } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Navíc platí i

$$(1')\text{ Pokud } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

$$(2')\text{ Pokud } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Příklad: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro každé $x < 0$.
2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ v závislosti na $x \in \mathbf{R}$.

Věta T 5.10 (Leibnizovo kritérium)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje. Tedy z konvergence řady neplyne absolutní konvergence.

Lemma (Abelova parciální sumace)**.** *Nechť $m, n \in \mathbf{N}$ a $m \le n$ a nechť $a_m, \dots, a_n, b_m, \dots, b_n \in \mathbf{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Pak platí*

$$\sum_{i=m}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.$$

Konec 3. přednášky 27.2.

Věta T 5.11 (Abel-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek*

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je konvergentní,}$$

$$(D)\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ má omezené častečné součty, tedy}$$

$$\exists K > 0\ \forall m \in \mathbf{N} : \quad |s_m| = \Big|\sum_{i=1}^{m} a_i\Big| < K.$$

Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.

Příklad: 1) $\{\sin n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $\{\cos n\}_{n\in\mathbf{N}}$ mají omezené částečné součty.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ konvergují neabsolutně.

5.4. Přerovnávání řad a součin řad

Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme *přerovnáním řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta T 5.12 (o přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní řada a má stejný součet jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Věta BD 5.13 (Riemann)**.** *Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu z $\mathbf{R}^*$. Neboli: Nechť pro konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$. Pak pro libovolné $s \in \mathbf{R}^*$ existuje bijekce $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ taková, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s.$$

Konec 4. přednášky 1.3.

Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. *Cauchyovským součinem* těchto řad nazveme řadu
$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i}b_i\Big).$$

Věta T 5.14 (o součinu řad). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně. Pak*
$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i}b_i\Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big).$$

Příklady: 1) $e^x e^y = e^{x+y}$.
2) Nechť $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, pak řada Cauchyovských součtů diverguje.

Věta T 5.15 (zavedení exponenciely). *Existuje funkce* $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *splňující:*

a) $\exp(x)$ *je rostoucí na* $\mathbf{R}$,
b) $\forall x, y \in \mathbf{R} \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,
c) $\exp(0) = 1$,
d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$,
e) $\exp(x)$ *je spojitá na* $\mathbf{R}$.

5.5. Limita posloupnosti a součet řady v komplexním oboru

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Pak $c_n = a_b + ib_n$ je komplexní posloupnost. Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} c_n = A + iB$, pokud existují $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}$.

Příklady: 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2i}{3+in}$.
2) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n$.

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti a $c_n = a_n + ib_n$. Řekneme, že komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje k $A + iB$, pokud konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje pro $q \in \mathbf{C}$, $|q| < 1$.

Konec 5. přednášky 5.3.

Věta L 5.16 (vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady). *Nechť c_n je komplexní posloupnost a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje.*

Příklad: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje pro všechna $z \in \mathbf{C}$.

6. Primitivní funkce

Motivace: Obsah, objem, délka křivky, obsah povrchu ...

6.1. Základní vlastnosti

Definice. Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce* k funkci f, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$. Množinu všech primitivních funkcí k f na I značíme $\int f(x)\,dx$.

Věta L 6.1 (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu). *Nechť F a G jsou primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbf{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro všechna $x \in I$.*

Poznámka: 1. Značíme $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$, nebo $\int x\,dx \overset{C}{=} \frac{x^2}{2}$.
2. Nechť F je primitivní k f. Pak F je spojitá.
3. Funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá na $\mathbf{R}$ primitivní funkci.
4. Funkce $F(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pro $x \neq 0$ a $F(0) = 0$ je diferencovatelná na $\mathbf{R}$, ale její derivace není spojitá na $\mathbf{R}$.

Věta T 6.2 (o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce). *Nechť I je otevřený interval a f je spojitá funkce na I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Poznámka: Primitivní funkce k e^{-x^2} existuje, ale nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Věta L 6.3 (linearita primitivní funkce). *Nechť f má primitivní funkci F a g má primitivní funkci G na otevřeném intervalu I a nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Pak $\alpha f + \beta g$ má na I primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.*

Tabulkové integrály:

$$\int x^n \, dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ na } \mathbf{R} \text{ pro } n \in \mathbf{N} \text{ a na } (-\infty,0) \text{ a } (0,\infty) \text{ pro } n \in \mathbf{Z}\setminus\{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx \stackrel{C}{=} \log|x| \text{ na } (-\infty,0) \text{ a na } (0,\infty), \qquad \int e^x \, dx \stackrel{C}{=} e^x \text{ pro } x \in \mathbf{R}$$

$$\int \sin x \, dx \stackrel{C}{=} -\cos x \text{ pro } x \in \mathbf{R}, \qquad \int \cos x \, dx \stackrel{C}{=} \sin x \text{ pro } x \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx \stackrel{C}{=} \tan x \text{ pro } x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} \, dx \stackrel{C}{=} \operatorname{cotg} x \text{ pro } x \in (0,\pi) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx \stackrel{C}{=} \arctan x \text{ pro } x \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \stackrel{C}{=} \arcsin x \text{ pro } x \in (-1,1), \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \stackrel{C}{=} \arccos x \text{ pro } x \in (-1,1)$$

Příklad: Spočtěte $\int |x| \, dx$ na $\mathbf{R}$.

Věta T 6.4 (nutná podmínka existence primitivní funkce). *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subset I$ je $f(J)$ interval.*

Konec 6. přednášky 8.3.

Věta L 6.5 (integrace per partes). *Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce k g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)dx \ \text{na } I.$$

Příklady: 1) Spočtěte $\int xe^{2x} \, dx$ na $\mathbf{R}$.
2) Spočtěte $\int \log x \, dx$ na $(0,\infty)$.

Věta L 6.6 (první věta o substituci). *Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť φ je funkce definovaná na (α,β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě z (α,β) vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \ \text{na } (\alpha,\beta).$$

Příklad: Spočtěte $\int xe^{x^2} \, dx$ na $\mathbf{R}$.

Věta L 6.7 (druhá věta o substituci). *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α,β) vlastní nenulovou derivaci a $\varphi\big((\alpha,\beta)\big) = (a,b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a,b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) \ \text{na } (\alpha,\beta).$$

Pak

$$\int f(x)dx = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) \ \text{na } (a,b).$$

Poznámka: Při použití druhé věty o substituci je vždy nutné ověřit, že φ je prostá a na!

Příklady: 1. Spočtěte $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$ na $(-1,1)$.
2. Nechť F je primitivní k f. Spočtěte $\int f(ax+b) \, dx$ pro $a,b \in \mathbf{R}$.
3. Spočtěte $\int e^x \cos x \, dx$ na $\mathbf{R}$.
4. Spočtěte $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}$ na $\mathbf{R}$ pro $n \in \mathbf{N}$.

6.2. Integrace racionálních funkcí

Definice. Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů P/Q, kde Q není nulový polynom.

Věta (základní věta algebry). *Nechť $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$. Pak existují čísla $x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{C}$ tak, že*

$$P(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n),\ x \in \mathbf{R}.$$

Konec 7. přednášky 12.3.

Lemma (o komplexních kořenech polynomu) Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbf{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbf{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen násobnosti k.

Věta T 6.8 (o rozkladu na parciální zlomky). *Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(*i*) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q,*

(*ii*) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\cdots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\cdots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(*iii*) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$,

(*iv*) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

(*v*) *žádné dva z mnohočlenů* $x-x_1, \dots, x-x_k, x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemají společný kořen.*

(*vi*) *mnohočleny* $x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A^i_j \in \mathbf{R}$, $i \in \{1,\dots,k\}$, $j \in \{1,\dots,p_i\}$ *a* $B^i_j,\ C^i_j \in \mathbf{R}$, $i \in \{1,\dots,l\}$, $j \in \{1,\dots,q_i\}$ *taková, že platí*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A^1_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A^1_{p_1}}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A^k_1}{x-x_k} + \dots + \frac{A^k_{p_k}}{(x-x_k)^{p_k}} \\ &+ \frac{B^1_1 x + C^1_1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots + \frac{B^1_{q_1} x + C^1_{q_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots \\ &+ \frac{B^l_1 x + C^l_1}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} + \dots + \frac{B^l_{q_l} x + C^l_{q_l}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}.\end{aligned}$$

Postup při integraci racionální funkce:

1. Vydělit polynomy
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_1(x)\,dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}\,dx,$$
kde stupeň $P_2 <$ stupeň Q.

2. Rozklad na parciální zlomky podle předchozí věty.

3. Integrace parciálních zlomků. Stačí umět integrovat x^n, $\frac{1}{x^n}$, $\frac{2x}{(1+x^2)^k}$, $\frac{1}{(1+x^2)^k}$ a použít lineární substituci.

Příklady: 1. Vydělte polynomy $\frac{x^4+1}{x^2+2x}$.
2. Zintegrujte $\frac{1}{x+1}$ a $\frac{x+1}{x^2+x+1}$.
3. Spočtěte primitivní funkci $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$.

6.3 Substituce, převádějící na racionální funkce

(1) Nechť $a \in \mathbf{R}$. Při integraci funkcí typu
$$\int R\left(e^{ax}\right)\,dx$$
používáme substituci
$$t = e^{ax}.$$

(2) Při integraci funkcí typu
$$\int R\left(\log x\right)\frac{1}{x}\,dx$$
používáme substituci
$$t = \log x.$$

Příklady: 1. Spočtěte $\int \frac{1}{x(\log^2 x - 5\log x + 6)}\,dx$.
2. Spočtěte $\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}\,dx$.

Konec 8. přednášky 15.3.

6.4. Integrace trigonometrických funkcí

Definice. Racionální funkcí dvou proměnných rozumíme podíl dvou polynomů $R(a,b) = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$, kde $P(a,b)$ a $Q(a,b)$ jsou polynomy dvou proměnných a Q není identicky nulový.

(3) Při integraci funkcí
$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$
používáme substituce:
(*i*) pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \cos x$

(ii) pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \sin x$
(iii) pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \tan x$
(iv) vždy funguje substituce $t = \tan \frac{x}{2}$.
Dobrá rada: Pokud je možné použít (i) nebo (ii), je výpočet většinou nejsnazší. Substituci (iv) je dobré používat jen, když nelze použít (i), (ii) ani (iii).
Poznámka: Po substituci $t = \tan x$ a $t = \tan \frac{x}{2}$ je většinou nutné primitivní funkci po formálním spočtení ještě 'lepit'.

Příklady: 1. Spočtěte $\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x}\, dx$.
2. Spočtěte $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\, dx$.

6.5. Integrace funkcí obsahujících odmocniny

(4) Nechť $q \in \mathbf{N}$ a $ad \neq bc$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

používáme substituci

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(5) (Eulerovy substituce) Nechť $a \neq 0$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\, dx$$

používáme následující substituce:

a) Polynom $ax^2 + bx + x$ má dvojnásobný kořen α a $a > 0$, pak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|$$

a jedná se v podstatě o integraci běžné racionální funkce.

b) Polynom $ax^2 + bx + x$ má dva reálné kořeny α_1 a α_2. Pak úpravou převedeme na tvar (4) pro odmocninu $\sqrt{a\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}}$ nebo $\sqrt{a\frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_2}}$.

c) Polynom $ax^2 + bx + x$ nemá reálný kořen a $a > 0$. Pak použijeme substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t.$$

Poznámka: Substituce (3) (iii), (iv) a (5) c) jsou substituce 2. druhu a je vždy potřeba ověřit, že vnitřní funkce je monotónní a na.

Příklady: 1. Spočtěte $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\, dx$.
2. Spočtěte $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\, dx$.

7. Určitý integrál

7.1. Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme *dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ *zjemňuje* dělení D intervalu $[a, b]$, jestliže každý bod dělení D je i bodem dělení D'.

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Definujme *horní a dolní součty*

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \sup\{f(x);\ x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \inf\{f(x);\ x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$

horní Riemannův integrál

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\Big\{S(f, D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\Big\}$$

a *dolní Riemannův integrál*

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\Big\{s(f, D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\Big\}.$$

Pokud $(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, pak řekneme, že f je Riemannovsky integrovatelná a klademe

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Množinu funkcí majících Riemannův integrál značíme $R([a,b])$.

Poznámka: Omezenost f je nutně potřeba.

Přiklady: 1. $(R)\int_0^1 1\,dx = 1$.

2. Nechť D je Dirichletova funkce, pak $(R)\overline{\int_0^1} D(x)\,dx = 1$ a $(R)\underline{\int_0^1} D(x)\,dx = 0$.
Konec 9. přednášky 19.3.

Věta L 7.1 (o zjemnění dělení). *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$, D a D' jsou dělení intervalu $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak*

$$s(f,D) \le s(f,D') \le S(f,D') \le S(f,D).$$

Věta L 7.2 (o dvou děleních). *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak*

$$s(f,D_1) \le S(f,D_2).$$

Důsledek: Nechť f je omezená na $[a,b]$, D_1 a D_2 jsou dělení $[a,b]$,

$$m := \inf\{f(x):\ x\in[a,b]\} \text{ a } M := \sup\{f(x):\ x\in[a,b]\}\ .$$

Pak

$$m(b-a) \le s(f,D_1) \le (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,D_2) \le M(b-a).$$

Definice. Nechť $D=\{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Číslo $\nu(D)=\max_{j=1,\dots,n}|x_j-x_{j-1}|$ nazveme *normou dělení D.*

Věta T 7.3 (aproximace R integrálu pomocí součtů). *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost dělení $[a,b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty}\nu(D_n)=0$. Potom*

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{n\in\mathbf{N}} S(f,D_n) \text{ a } (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{n\in\mathbf{N}} s(f,D_n).$$

Příklad: Spočtěte $(R)\int_0^1 x^2\,dx$.

Důsledek: Z předchozí věty a Věty 7.1 dostaneme:
Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost dělení $[a,b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty}\nu(D_n)=0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Potom

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) \text{ a } (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n).$$

Důkaz: Z Věty 7.1. víme

$$s(f,D_n) \le s(f,D_{n+1}) \le S(f,D_{n+1}) \le S(f,D_{n+1}).$$

Posloupnost $s(f,D_n)$ je tedy neklesající, a proto $\lim_{n\to\infty} s(f,D_n)=\sup_{n\in\mathbf{N}} s(f,D_n)$. Analogicky $S(f,D_n)$ je nerostoucí, a tedy $\lim_{n\to\infty} S(f,D_n)=\inf_{n\in\mathbf{N}} S(f,D_n)$. □

Věta L 7.4 (kritérium existence R integrálu). *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Pak*

$$f\in R([a,b]) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists \text{ dělení } D\ [a,b]:\ S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon.$$

Definice. Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, pokud

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in I:\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Poznámky: 1. Spojitost a stejnoměrná spojitost na intervalu I se liší pořadím kvantifikátorů:

$$\text{Spojitost: } \forall x\in I\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y\in I:\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon;$$

$$\text{Stejnoměrná spojitost: } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ \forall y\in I:\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

2. Nechť f je stejnoměrně spojitá na I, pak f je spojitá na I.
3. Funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ je spojitá na $(0,1)$, ale není tam stejnoměrně spojitá.
Konec 10. přednášky 22.3.

Věta T 7.5 (o vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti). *Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.*

Věta L 7.6 (o vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti). *Nechť f je spojitá na $[a,b]$, pak $f \in R([a,b])$.*

Věta L 7.7 (vztah monotonie a Riemannovské integrovatelnosti). *Nechť f je (omezená) monotónní funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b])$.*

Konec 11. přednášky 26.3.

Věta T 7.8 (vlastnosti R integrálu).
a) Linearita: $f, g \in R([a,b])$, $\alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow f+g \in R([a,b])$, $\alpha f \in R([a,b])$ a

$$(R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g \quad a \quad (R)\int_a^b \alpha f = \alpha (R)\int_a^b f.$$

b) Monotonie: $f, g \in R([a,b])$, $f \le g$, pak $(R)\int_a^b f \le (R)\int_a^b g$.
c) Aditivita vzhledem k intervalům: Nechť $a < c < b$. Pak

$$f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a,c]) \text{ a } f \in R([c,b]),$$
$$(R)\int_a^b f = (R)\int_a^c f + (R)\int_c^b f.$$

Úmluva: 1. Nechť $b < a$, pak definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
2. Dále definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Věta T 7.9 (o derivaci integrálu podle horní meze). *Nechť J je neprázdný interval a $f \in R([\alpha,\beta])$ pro každé $\alpha,\beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod. Definujme na J funkci*

$$F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,dt.$$

Pak platí

(i) F je spojitá na J,

(ii) Jestliže je f spojitá v bodě $x_0 \in \operatorname{int} J$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důsledek:
(i) Je-li f spojitá na (a,b), pak má na (a,b) primitivní funkci (**Věta T 6.2**).
(ii) Nechť f je spojitá na intervalu $[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$. Pak

$$(R)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{x\to\beta-} F(x) - \lim_{x\to\alpha+} F(x),$$

kde F je primitivní funkce k f na (α,β).

7.2. Newtonův integrál

Definice. Řekneme, že funkce f má na intervalu (a,b) *Newtonův integrál*, jestliže má na (a,b) primitivní funkci F a $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ jsou vlastní. Hodnotou Newtonova integrálu rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Množinu funkcí majících Newtonův integrál značíme $N(a,b)$.

Poznámky:1. Jestliže f je spojitá na $[a,b]$, pak existují oba integrály a rovnají se $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx$.
2. Existuje $(N)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, ale neexistuje Riemannův integrál, protože f není omezená.
3. Existuje $(R)\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\,dx$, ale neexistuje Newtonův integrál, protože $\operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci.

Konec 12. přednášky 2.4.

Věta L 7.10 (per partes pro určitý integrál). *Nechť f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a,b]$. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

kde $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ a obecněji $= \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - \lim_{x\to a+} f(x)g(x)$.

Příklad: $\int_0^1 \log x\,dx$

Věta BD 7.11 (o substituci pro určitý integrál)**.** *(i) Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je funkce, která má na intervalu $[\alpha,\beta]$ spojitou první derivaci. Pak*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

(ii) Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je na a má na $[\alpha,\beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci. Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

kde Φ je primitivní funkce k $f \circ \varphi \cdot \varphi'$.

Příklady: 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x\,dx$.
2. obsah kruhu: $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.

Pozorování: Nechť f je spojitá funkce na (a,b) a $a < c < b$. Pak

$$(i)\ f \in N(a,c) \text{ a } f \in N(c,b) \Rightarrow f \in N(a,b).$$

$$(ii)\ f \in N(a,b) \Rightarrow f \in N(a,c).$$

7.3. Konvergence integrálu

Cílem této kapitoly je určit, kdy je integrál $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ konečný. V tomto případě říkáme, že $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje.

Připomeň: Je-li $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu, pak $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje.

Příklady: 1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$
2. $\int_2^\infty \frac{1}{x\log^\alpha(x)}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < 1$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\log x|^\alpha}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Věta L 7.12 (srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g : [a,b) \to \mathbf{R}$ spojité na $[a,b)$ a nechť $0 \le f(x) \le g(x)$ pro všechna $x \in [a,b)$. Potom*

$$g \in N(a,b) \Rightarrow f \in N(a,b).$$

Příklad: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$ konverguje

Věta L 7.13 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g : [a,b) \to \mathbf{R}$ spojité a nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže existuje $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak*

$$g \in N(a,b) \Leftrightarrow f \in N(a,b).$$

Příklad: $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\,dx$ konverguje

Konec 13. přednášky 5.4.

Lemma (odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí) Nechť $a, b \in \mathbf{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$ a $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Věta T 7.14 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ a $a < b$. Nechť $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a,b). Dále nechť $g : [a,b) \to \mathbf{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí*

$$(A)\ \text{Jestliže } f \in N(a,b) \text{ a } g \text{ je omezená, pak } fg \in N(a,b).$$

$$(D)\ \text{Je-li } F \text{ omezená na } (a,b) \text{ a } \lim_{x\to b-} g(x) = 0, \text{ pak } fg \in N(a,b).$$

Příklad: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje, ale nekonverguje absolutně.

Věta L 7.15 (věta o střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$, g je nezáporná na $[a,b]$, $g \in N(a,b)$ a $fg \in N(a,b)$. Potom existuje $c \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Konec 14. přednášky 9.4.

7.4. Aplikace určitého integrálu

Definice. Nechť $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je nezáporná spojitá funkce, pak *obsahem plochy* pod grafem funkce f nazveme

$$\text{Obsah}(f, [a, b]) = (R) \int_a^b f(x)\, dx. = (N) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Definice. Nechť $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkce a nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a, b]$. Označme

$$L(f, D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}.$$

Délkou křivky f nazveme

$$L\big(f([a, b])\big) = \sup\big\{L(f, D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\big\}.$$

Věta T 7.16 (délka křivky)**.** *Nechť f má na intervalu $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak*

$$L\big(f([a, b])\big) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Věta BD 7.17 (délka křivky v $\mathbf{R}^n$)**.** *Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je spojitá a má spojitou první derivaci. Pak*

$$L\big(\varphi([a, b])\big) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(x))^2 + (\varphi_2'(x))^2 + \ldots + (\varphi_n'(x))^2}\, dx$$

Příklad: Spočtete délku kružnice.

Poznámka: Stejná křivka může mít různé parametrizace. Je vhodné ukázat, že délka křivky nezávisí na parametrizaci.

Věta BD 7.18 (objem a povrch rotačního tělesa - bez důkazu)**.** *Nechť $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je spojitá a nezáporná. Označme*

$$T = \big\{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 :\ x \in [a, b] \ a\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\big\}.$$

Pak

$$\text{Objem}(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$\text{Obsah povrchu}(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Příklad: Spočtete objem a obsah povrchu koule.

Věta L 7.19 (integrální kritérium konvergence řad)**.** *Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na intervalu $[n_0 - 1, \infty)$ pro nějaké $n_0 \in \mathbf{N}$. Nechť pro posloupnost a_n platí $a_n = f(n)$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak*

$$(N) \int_{n_0}^\infty f(x)\, dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n \text{ konverguje.}$$

Konec 15. přednášky 12.4.

Příklady: 1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$
2. $\int_2^\infty \frac{1}{x \log^\alpha(x)}\, dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Příklady: 1. Stirlingova formule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1.$$

2. Wallisova formule

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{2m}}.$$

8. Obyčejné diferenciální rovnice

Motivace: 1. Volný pád s odporem vzduchu. Pozice v čase t je $y(t)$:
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g + \alpha(\frac{dy(t)}{dt})^2.$$
2. Růst populace
$$\frac{dn(t)}{dt} = kn(t)(M - n(t)).$$
3. kyvadlo délky l, $x(t)$ je úhel kyvadla v čase t:
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{g}{l}\sin x(t).$$

Konec 16. přednášky 16.4.

Spousta jevů ve fyzice, chemii, biologii, nebo ekonomii je popsána pomocí diferenciálních rovnic.

8.1. Řešení, existence a jednoznačnost

Definice. Nechť $\Phi : \Omega \subset \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$. *Obyčejnou diferenciální rovnicí* (ve zkratce ODR) n-tého řádu nazveme

(8.1) $$\Phi\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) = 0.$$

Definice. *Řešení ODR* na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$ je funkce $y(x)$ splňující

(i) existuje $y^{(k)}(x)$ vlastní pro $k = 1, \ldots, n$ a všechna $x \in I$,

(ii) (8.1) platí pro všechna $x \in I$.

Řešení je dvojice (y, I).

Definice. Řekneme, že $(\tilde{y}, \tilde{I})$ je *rozšířením* (y, I), pokud

(i) $\tilde{y}$ je řešení (8.1) na $\tilde{I}$, (ii) $I \subsetneq \tilde{I}$, (iii) $y = \tilde{y}$ na I.

Řekneme, že (y, I) je *maximální řešení*, pokud nemá rozšíření.

Cíle studia ODR:
- sestavit rovnici
- existují řešení a kolik jich je?
- najít všechna maximální řešení
- diskuse o jednoznačnosti a kvalitě řešení
- případná fyzikální interpretace

Definice. Řekneme, že $I \subset \mathbf{R}^n$ je *otevřený interval*, pokud existují otevřené intervaly $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tak, že $I = I_1 \times \ldots \times I_n$.

Nechť $c \in \mathbf{R}^n$ a $r > 0$. Definujme *kouli* jako
$$B(c, r) := \Big\{x \in \mathbf{R}^n : \ \|x - c\| = \big(\sum_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^2\big)^{\frac{1}{2}} < r\Big\}.$$

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}^n$ je otevřený interval a $f : I \to \mathbf{R}$ je funkce. Řekneme, že $f : I \to \mathbf{R}$ je *spojitá funkce v bodě* x_0, pokud
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in B(x_0, \delta) \cap I \text{ platí } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
Řekneme, že f je *spojitá* na I, pokud je spojitá ve všech bodech I.

Příklady: 1. Nechť $h(x), g(y)$ jsou spojité z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$. Pak $f(x, y) = h(x)$ a $\tilde{f}(x, y) = g(y)$ jsou spojité z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}$.
2. Nechť $f_1(x), f_2(x)$ jsou spojité z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. Pak $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ a $\tilde{f}(x) = f_1(x) + f_2(x)$ jsou spojité z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. Specielně napřiklad polynomy funkcí více proměnných jsou spojité funkce.
2. $\int_2^\infty \frac{1}{x \log^\alpha(x)}\, dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Věta T 8.1 (Peano s $y^{(n)}$ - důkaz později)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřený interval, $f : I \to \mathbf{R}$ je spojitá a $[x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}] \in I$. Pak existuje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ okolí x_0 a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR*
$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$
a počáteční podmínku
$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Poznámky: 1) Tato věta je lokální a δ může být velmi malé.
2) Tato věta nedává jednoznačnost řešení.
3) Každé řešení lze rozšířit do maximálního řešení.

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ je oteřený interval. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je *lokálně lipschitzovská* vůči y, pokud pro všechny omezené množiny $U \subset I$, existuje $K \in \mathbf{R}$ tak, že

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq K|y - \tilde{y}| \text{ pro všechna } [x,y] \in U \text{ a } [x,\tilde{y}] \in U.$$

Příklady: 1) $f(y) = \sqrt[3]{y}$ není lipschitzkovská v 0.
2) Nechť má $f(y)$ spojitou derivaci (vzhledem k y). Pak je f lokálně lipschitzovská vůči y.

Věta T 8.2 (Picard - důkaz později)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ je otevřený interval a $[x_0, y_0] \in I$. Nechť $f : I \to \mathbf{R}$ je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči y. Pak existuje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ okolí x_0 a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ s počáteční podmínkou } y(x_0) = y_0.$$

Navíc y je jediné řešení na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

8.2. Rovnice prvního řádu

Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ je otevřený interval a $f : I \to \mathbf{R}$ je spojitá. V této kapitole studujeme pouze rovnice typu

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Speciální tvary:

- (i) $y' = f(x)$
- (ii) $y' = g(y)$
- (iii) $y' = g(y)h(x)$ (separované proměnné)
- (iv) $y' = h(\frac{y}{x})$ (homogenní rovnice) - substitucí $z = \frac{y}{x}$ převedeme na (iii)
- (v) $y' = a(x)y + b(x)$ (lineární rovnice 1. řádu)
- (vi) $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$, (Bernouliho rovnice)- substitucí $z = y^{1-\alpha}$ převedeme na (v)

Konec 17. přednášky 19.4.

Věta T 8.3 (o existenci řešení separované rovnice)**.** *Nechť $h : (a,b) \to \mathbf{R}$ je spojitá, $g : (c,d) \to \mathbf{R}$ je spojitá a nenulová. Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in \Omega := (a,b) \times (c,d)$ prochází právě jedno řešení rovnice*

$$y' = g(y)h(x).$$

Postup pro řešení rovnice $y' = h(x)g(y)$ se separovanými proměnnými:

(1) Určíme maximální intervaly I v D_h.

(2) Najdeme body, kde $g(c) = 0$. Pak $y(x) \equiv c$ je řešení. Určíme maximální intervaly J, kde je g nenulová.

(3) Pro $x \in I$ hledáme řešení s hodnotami v J rovnice

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Integrováním dostaneme

$$G(y(x)) = H(x) + c,$$

kde H je primitivní k h na I a G je primitivní k $\frac{1}{g}$ na J.

(4) Zafixujeme c a hledáme řešení

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

Toto je řešení na

$$\{x \in I : \; H(x) + c \in G(J)\}.$$

(5) Z řešení z (4) a konstantních řešení z (2) slepíme všechna maximální řešení.

Příklady: 1. $y' = y^2$
2. $y' = x^2 y$
3. $y' = \sqrt{1 - y^2}$.
4. padák

Věta L 8.4 (o řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu)**.** *Nechť* $(c,d) \subset \mathbf{R}$ *je interval,* $x_0 \in (c,d)$, $y_0 \in \mathbf{R}$ *a* $a, b : (c,d) \to \mathbf{R}$ *jsou spojité funkce. Maximální řešení rovnice* $y' = a(x)y + b(x)$ *s počáteční podmínkou* $y(x_0) = y_0$ *má tvar*

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt\Big)e^{A(x)} + y_0 e^{A(x)} \quad \textit{pro } x \in (c,d),$$

kde A *je primitivní k* a *splňující* $A(x_0) = 0$.

Postup pro řešení rovnice $y' = a(x)y + b(x)$**:**

a) Vyřešíme rovnici $y' = a(x)y$ (separované proměnné). Vyjde

$$y(x) = Ke^{A(x)} \text{ pro } K \in \mathbf{R}, \text{ kde } A(x) \text{ je primitivní k } a(x).$$

b) Hledáme jedno partikulární řešení ve tvaru

$$y(x) = K_0(x)e^{A(x)}.$$

Dosazením

$$y'(x) = (K_0(x)e^{A(x)})' = K_0'(x)e^{A(x)} + K_0(x)e^{A(x)}a(x)$$

do rovnice vyjde

$$K_0'(x)e^{A(x)} + K_0(x)e^{A(x)}a(x) = y'(x) = a(x)y(x) + b(x) = a(x)K_0(x)e^{A(x)}.$$

Odtud $K_0'(x) = e^{-A(x)}b(x)$, a tedy K_0 spocteme jako primitivni funkci k $e^{-A(x)}b(x)$.

c) Řešení je celkově partikulární řešení z b) plus obecné řešení homogenní rovnice z a)

$$y(x) = K_0(x)e^{A(x)} + ce^{A(x)}.$$

Konec 18. přednášky 23.4.

Příklady: 1. $y' + xy = x$

2. šnek na gumě

8.3. Systémy lineárních ODR a lineární rovnice řádu n

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a mějme funkce $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbf{R}$. *Lineární ODR řádu* n nazvu rovnici

$$y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \text{ pro } x \in I.$$

Je-li $b \equiv 0$ na I, pak se rovnice nazývá homogenní.

Příklad: $y'' + y = 1$.

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, mějme funkce $b, y : I \to \mathbf{R}^n$ a mějme maticovou funkci $A : I \to \mathbf{R}^{n^2}$. *Systémem ODR prvního řádu* nazveme systém rovnic

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n + b_1\\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2,n}y_n + b_2\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n + b_n
\end{aligned}$$

neboli v maticovém zápisu

$$y' = Ay + b.$$

Je-li $b \equiv 0$ na I, pak se rovnice nazývá homogenní.

Příklad:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2\\
y_2' &= -y_1 + y_2 - x
\end{aligned}$$

neboli

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

Poznámka: Řešení jedné rovnice řádu n lze převést na řešení systému n rovnic řádu 1: Nechť y řeší

$$y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Pak n funkcí

$$u_1(x) = y(x),\ u_2(x) = y'(x), \ldots,\ u_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

řeší soustavu

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= b(x) - a_{n-1}(x)u_n(x) - \ldots - a_0(x)u_1(x) \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$u_1(x_0) = y_0,\ u_2(x_0) = y_1, \ldots,\ u_n(x_0) = y_{n-1}.$$

V dalším si tedy vyslovíme věty pro soustavy n rovnic řádu 1, které mají okamžitě analogické důsledky pro jednu rovnici řádu n.

Naopak řešení systému n rovnic řádu 1 lze občas, ale ne vždy, převést na jednu rovnici řádu n.

Věta T 8.5 (o existenci řešení systému ODR 1. řádu)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a mějme spojité funkce $b_j,\ a_{ij} : I \to \mathbf{R}$ pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Nechť $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbf{R}^n$ a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je spojitá maticová funkce. Pak existuje právě jedno řešení rovnice*

$$y' = Ay + b \text{ s počáteční podmínkou } y(x_0) = y^0$$

definované na celém I.

Věta L 8.6 (prostor řešení systému ODR 1. řádu)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a mějme spojité funkce $b_j,\ a_{ij} : I \to \mathbf{R}$ pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Označme*

$$L(y) = y' - Ay \text{ a } H = \operatorname{Ker} L = \{y \in C^1(I, \mathbf{R}^n) :\ L(y) = 0 \text{ na } I\}.$$

Pak H je vektorový prostor (nad tělesem $\mathbf{R}$) dimenze n. Označme M množinu všech řešení nehomogenního systému rovnic $Ly = b$ a nechť y_0 je jedno pevné řešení $L(y_0) = b$. Pak

$$M = y_0 + \operatorname{Ker} L.$$

Konec 19. přednášky 26.4.

Definice. Libovolnou bázi $\{y_1, \ldots, y_n\}$ prostoru $H = \operatorname{Ker}(y' - Ay)$ (tedy libovolných n lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice $y' = Ay$) nazýváme *fundamentálním systémem řešení FSŘ homogenní rovnice* $y' = Ay$.

8.4. Rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Definice. Nechť $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

nazveme *charakteristickým polynomem* rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Věta T 8.7 (FSŘ pro rovnici n-tého řadu s konstantními koeficienty)**.** *Mějme zadány $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou různé kořeny charakteristiského polynomu násobnosti $s_1, \ldots, s_k$ (tedy $s_1 + \ldots + s_k = n$). Pak funkce*

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \ldots,\ x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots,\ e^{\lambda_k x}, \ldots,\ x^{s_k-1}e^{\lambda_k x}$$

tvoří fundamentální systém řešení

$$y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0 \text{ na } \mathbf{R}.$$

Konec 20. přednášky 30.4.

Věta T 8.8 (o speciální pravé straně pro rovnici n-tého řadu - bez důkazu)**.** *Mějme zadány $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$, nechť $P_m(x)$ je polynom m-tého stupně a $(\alpha + i\beta)$ je k-násobný kořen charakteristického polynomu (lze i $k = 0$, $\alpha = 0$ nebo $\beta = 0$). Pak rovnice*

$$y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \quad (\text{ popřípadě } P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)$$

má na $\mathbf{R}$ řešení ve tvaru

$$y_0(x) = x^kQ_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^kR_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kde Q_m a R_m jsou polynomy stupně m.

Poznámka: Není-li pravá strana rovnice ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x),$$

kde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice $y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Příklady: 1. $y'' - y = e^x + e^{2x}$
2. $y'' + y = \sin ax$, $a \in \mathbf{R}$
3. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$

8.5. Systémy rovnic s konstantními koeficienty

Konec 21. přednášky 3.5.

Věta L 8.9 (FSŘ pro soustavu rovnic s konstantními koeficienty)**.** *Nechť má matice A všechna vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ různá a nechť $v_1, \ldots, v_n$ jsou příslušné (nenulové) vlastní vektory. Pak vektorové funkce*

$$v_1 e^{\lambda_1 x}, \ldots,\ v_n e^{\lambda_n x}$$

tvoří fundamentální systém řešení

$$y' = Ay \ \textit{na}\ \mathbf{R}.$$

Poznámka: Nemá-li matice A všechna vlastní čísla různá, pak lze fundamentální systém také algoritmicky sestrojit. Nechť λ je k-násobné vlastní číslo matice A.

a) Pokud existuje k lineárně nezávislých vlastních vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ pak do FSŘ dáme funkce

$$v_1 e^{\lambda x},\ v_2 e^{\lambda x}, \ldots, v_n e^{\lambda x}.$$

b) Pokud existuje pouze jeden vlasní vektor v_1, tak nalezneme řetězec vektorů $v_2, \ldots, v_k$, aby

$$(A - \lambda E) v_1 = 0,\ (A - \lambda E) v_2 = v_1,\ \ldots,\ (A - \lambda E) v_k = v_{k-1}$$

a do FSŘ dáme funkce

$$v_1 e^{\lambda x},\ v_1 x e^{\lambda x} + v_2 e^{\lambda x},\ v_1 \frac{x^2}{2} e^{\lambda x} + v_2 x e^{\lambda x} + v_2 e^{\lambda x}, \ldots, v_1 \frac{x^k}{k!} e^{\lambda x} + \ldots + v_k e^{\lambda x}.$$

c) Pokud existuje více vlastních vektorů, ale ne k tak provedeme něco mezi. Záleží to na Jordanově tvaru matice $A = R^{-1} J R$, kde R je matice rotace. Je-li například

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

pak existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory (jeden pro druhý v_1 a jeden pro třetí řádek v_2). Pro ten první vlastní vektor nalezneme příslušný řetězec délky 2 ($(A - \lambda E)u = v_1$) a do FSŘ dáme

$$v_1 e^{\lambda x},\ v_1 x e^{\lambda x} + u e^{\lambda x},\ v_2 e^{\lambda x}.$$

Obecně pro každou Jordanovu buňku velikosti $m \times m$ nalezneme řetězec délky m a příslušné funkce jako v b) dáme do FSŘ.

Odůvodnění: Počítání s exponencielou matice.

Příklady: 1. $y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y$ s počáteční podmínkou $y(0) = (3, 0)$. 2. $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} y$
3. $y' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 9 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} y$ 4. $y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} y$

Konec 23. přednášky 26.5.

Definice. Nechť $y^1,\ y^2,\ \ldots,\ y^n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y' = Ay$. Pak matici

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \ldots & y_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

nazveme *fundamentální maticí soustavy $y' = Ay$.*

Lemma. Nechť φ je fundamentální matice soustavy $y' = Ay$ na otevřeném intervalu I. Pak $\varphi(x)$ je regulární pro každé $x \in I$.

Věta L 8.10 (tvar řešení pro soustavu ODR)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $A : I \to \mathbf{R}^{n\times n}$ a $b : I \to \mathbf{R}^n$ jsou spojité funkce, $x_0 \in I$ a $y^0 \in \mathbf{R}^n$. Pak maximální řešení rovnice $y' = Ay + b$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y^0$ má tvar*

$$y(x) = \varphi(x)\varphi^{-1}(x_0)y^0 + \varphi(x)\int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t)b(t)\,dt,$$

kde φ je fundamentální matice soustavy.

Jako důsledek tohoto tvrzení lze odvodit Větu 8.8 i následující:

Věta T 8.11 (o speciální pravé straně pro soustavu n-tého řadu - bez důkazu)**.** *Nechť $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ je matice a p, q jsou $n \times 1$ vektory polynomů. Pak soustava*

$$y' = Ay + p(x)e^{ax}\cos bx + q(x)e^{ax}\sin bx$$

má řešení ve tvaru

$$y(x) = \tilde{p}(x)e^{ax}\cos bx + \tilde{q}(x)e^{ax}\sin bx,$$

kde $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ jsou vektory polynomů a

$$\max\{\operatorname{st}\tilde{p}, \operatorname{st}\tilde{q}\} = \max\{\operatorname{st} p, \operatorname{st} q\} + \textit{násobnost } (a + ib) \textit{ jako vlastního čísla } A.$$

Příklad: 1. $y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2e^x \\ 2\sin x \end{pmatrix}$

Poznámka: Není-li pravá strana rovnice ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i(x),$$

kde $\{y_1, \dots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice $y' = Ay$.

Konec 24. přednášky 28.5.

9. Metrické prostory I

9.1. Základní pojmy

Definice. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (P, ϱ), kde P je množina bodů a $\varrho : P \times P \to \mathbf{R}$ splňuje

(i) $\forall x, y \in P : \ \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in P : \ \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, (symetrie)

(iii) $\forall x, y, z \in P : \ \varrho(x, z) \le \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. ($\triangle$-nerovnost)

Funkci ϱ nazýváme *metrika*.

Příklady:

1) Euklidovská metrika na $\mathbf{R}^n$. Pro $x, y \in \mathbf{R}^n$ definujeme $\varrho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.
2) Maximová metrika na $\mathbf{R}^n$. Definujeme $\varrho_\infty(x, y) = \max_{i=1\dots n} |x_i - y_i|$.
3) Součtová metrika na $\mathbf{R}^n$. Definujeme $\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.
4) Diskrétní metrika na libovolné množině P je definována jako $\varrho(x, x) = 0$ pro všechna $x \in P$ a $\varrho(x, y) = 1$ pro všechna $x \neq y$.
5) Supremová metrika na $C([0, 1])$ je definována $\varrho(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.
6) Metrika na $L^2([0, 2\pi]) = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R} : \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty\}$ je definována

$$\varrho(f, g) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2\,dx}.$$

7) Definujme prostor obrázků $Obr = \{x \in \mathbf{R}^{1280\times 1024} : \ x_i \in [0, 1]\}$ s metrikou $|x - y| = \varrho_e(x, y)$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$, $r > 0$. *Otevřenou koulí se středem x a poloměrem r* nazveme

$$B(x, r) := \{y \in P : \ \varrho(x, y) < r\}.$$

Uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r nazveme

$$\overline{B(x, r)} := \{y \in P : \ \varrho(x, y) \le r\}.$$

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subset P$ je *otevřená (v (P, ϱ))*, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $r > 0$, že $B(x, r) \subset G$. Řekneme, že množina $F \subset P$ je *uzavřená (v (P, ϱ))*, pokud je $P \setminus F$ otevřená.

Příklady: 1. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak $B(x,r)$ je otevřená množina a $\overline{B(x,r)}$ je uzavřená množina.
2. Je $[0,1]$ otevřená množina v $\mathbf{R}$ s diskrétní metrikou?

Věta L 9.1 (vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor. Pak*

(i) $\emptyset$ *a* P *jsou otevřené.*

(ii) Jsou-li $G_1, \dots, G_n$ *otevřené, pak* $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ *je otevřená.*

(iii) Nechť A *je libovolná (i nekonečná) indexová množina.*

Jsou-li $G_\alpha,\ \alpha \in A$ *otevřené, pak* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ *je otevřená.*

Konec 25. přednášky 2.6.

Věta L 9.2 (vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor. Pak*

(i) $\emptyset$ *a* P *jsou uzavřené.*

(ii) Jsou-li $F_1, \dots, F_n$ *uzavřené, pak* $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ *je uzavřená.*

(iii) Jsou-li $F_\alpha,\ \alpha \in A$ *uzavřené, pak* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *je uzavřená.*

Příklad: $\bigcap_{i=1}^{\infty}(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) = \{0\}$ není otevřená v $\mathbf{R}$.
$\bigcup_{i=1}^{\infty}[\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}] = (0,1)$ není uzavřená v $\mathbf{R}$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je *vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(x,r) \subset A$. Množinu všech vnitřních bodů A nazýváme *vnitřkem* A a značíme $\operatorname{int} A$.

Příklad: Co je vnitřek $[0,1)$ v $(\mathbf{R}, |.|)$, $Q(0,1)$ v $(\mathbf{R}^2, |.|)$ a $\mathbf{Q}$ v $(\mathbf{R}, |.|)$?

Věta L 9.3 (charakterizace vnitřku)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Potom* $\operatorname{int} A$ *je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v* A*.*

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je *hraničním bodem* množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ platí

$$M \cap B(x,r) \neq \emptyset \text{ a } (P \setminus M) \cap B(x,r) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hraničních bodů M nazýváme *hranicí* M a značíme ji ∂M.
Uzávěr množiny M je definován jako $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Příklad: Co je hranice a uzávěr $[0,1)$ v $(\mathbf{R}, |.|)$, $Q(0,1)$ v $(\mathbf{R}^2, |.|)$ a $\mathbf{Q}$ v $(\mathbf{R}, |.|)$?

Věta L 9.4 (uzávěr a uzavřené množiny)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Pak*

$$A \text{ je uzavřená v } P \Leftrightarrow \overline{A} = A.$$

Věta L 9.5 (vlastnosti uzávěru)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Potom platí*

(i) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$,

(ii) nechť $A \neq \emptyset$, *pak* $\overline{A} = \{x \in P:\ \varrho(x, A) = 0\}$,

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *tedy* $\overline{A}$ *je uzavřená množina.*

Konec 26. přednášky 4.6.

POKUS SE STIHNE, TAK TAKE NASLEDUJICI

9.2. Konvergence a spojitá zobrazení v metrických prostorech

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků P a $x \in P$. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* x *(v* (P, ϱ)*)*, pokud $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, nebo $x_n \overset{\varrho}{\to} x$.

Poznámka: Pro $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ je tento pojem konvergence shodný s dříve zavedeným.

Věta L 9.6 (vlastnosti konvergence)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Pak platí*

(i) Nechť pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z P existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ a $x \in P$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n = x$. Pak $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = y \Rightarrow x = y$. (Jednoznačnost limity)

(iii) Nechť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nechť $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pak $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Definice. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Nechť $M \subset P$, $f : M \to Q$ a $x_0 \in M$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě x_0 (vzhledem k M)*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\varrho(x_0,\delta) \cap M :\ f(x) \in B_\sigma(f(x_0),\varepsilon).$$

Řekneme, že f je *spojitá na M (vzhledem k M)*, jestliže je spojitá v každém bodě M (vzhledem k M). Nechť pro každé $\delta > 0$ platí $B_\varrho(x_0,\delta) \cap M \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Řekneme, že f má v bodě x_0 *limitu (vzhledem k M) rovnou $y \in Q$*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\varrho(x_0,\delta) \cap M \setminus \{x_0\} :\ f(x) \in B_\sigma(y,\varepsilon).$$

Poznámky: 1. Pojem konvergence a spojitosti v $(\mathbf{R}^n, |.|)$ je shodný s dříve zavedeným pojmem.
2. Definice spojitosti lze zapsat jako $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ f(B_\varrho(x_0,\delta)) \subset B_\sigma(f(x_0),\varepsilon)$.

Příklady (viz 2. semestr): 1. Nechť $h(x), g(y)$ jsou spojité z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$. Pak $f(x,y) = h(x)$ a $\tilde{f}(x,y) = g(y)$ jsou spojité z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}$.
2. Nechť $f_1(x), f_2(x)$ jsou spojité z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. Pak $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ a $\tilde{f}(x) = f_1(x) + f_2(x)$ jsou spojité z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. Specielně například polynomy funkcí více proměnných jsou spojité funkce.

Věta L 9.7 (charakterizace spojitosti)**.** *Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je spojitá na P,

(ii) $\forall G \subset Q$ otevřenou, je $f^{-1}(G)$ otevřená,

(iii) $\forall F \subset Q$ uzavřenou, je $f^{-1}(F)$ uzavřená.

Příklady: 1. Množina $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 1\}$ je otevřená.
2. Množina $\{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 :\ x + y + z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ je uzavřená.

Věta L 9.8 (spojitost složeného zobrazení)**.** *Nechť (P,ϱ), (Q,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory. Nechť $f : P \to Q$ je spojité zobrazení a $g : Q \to Z$ je spojité zobrazení. Pak $g \circ f : P \to Z$ je spojité zobrazení.*

Příklad: Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je spojitá z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}$.
Konec 1. přednášky 29.9.

Věta L 9.9 (Heine)**.** *Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Nechť $M \subset P$, $x_0 \in M$ a $f : M \to Q$. Pak je ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x\to x_0,\ x\in M} f(x) = f(x_0)$, neboli f je spojitá v x_0,

(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $x_n \in M$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Důsledek: Jako speciální případ dostáváme Heineho Větu 3.1 ze ZS.