Zkoušky z NMMA102, letní semestr 2023/2024

Obecné podmínky

Nutnou podmínkou ke skládání zkoušky je získání zápočtu. Pokud student nezískal zápočet před konáním zkoušky, může jej dostat i za úspěšné napsání písemné části, pokud bude ohodnocena alespoň 30 body.

Zkouška se skládá z písemné a ústní části, písemná část předchází ústní části. Pokud student neuspěl u písemné části, neprospěl u tohoto termínu. Pokud student uspěl u písemné části, skládá ústní zkoušku. Pokud student třikrát neuspěl u písemné části, může jít stejně k ústní zkoušce a počítá se mu nejlepší výsledek písemky. V tom případě musí z ústní zkoušky získat více bodů, aby byl celkový součet písemné a ústní části alespoň 50 bodů.

Písemná část zkoušky

Písemná část zkoušky se skládá z pěti příkladů, za které lze získat celkem 50 bodů. Příklady jsou vybrány z okruhů

1) vyšetření konvergence číselné řady (10 bodů)
2) určení primitivní funkce nebo určitý integrál (10 bodů)
3) vyšetření konvergence integrálu nebo aplikace integrálu (10 bodů)
4) diferenciální rovnice (10 bodů)
5) Teoretický příklad (10 bodů)

Písemná část trvá 150 minut. Student může používat donesenou literaturu (učebnice, poznámky, zápisky ze cvičení), nelze používat mobilní telefony, kalkulačky ani jinou výpočetní techniku. Při písemné i ústní části zkoušky se student prokáže dokladem totožnosti.

Student uspěje u písemné části, pokud je jeho celkový výsledek alespoň 25 bodů.

Vzor zadání písemky

1) (10 bodů) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n) \sin\Big(\frac{1}{n^2+1}\Big) n^{\alpha}$$

a) pro $\alpha = 1$ b) pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$.

2) (10 bodů) Spočtěte určitý integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 2}\, dx.$$

3) (10 bodů) Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x} + 2\sin(x-1)}{x^{\frac{4}{5}}\sqrt{x+1}}\, dx$$

4) (10 bodů) Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1+y^4}{y\cos^2 x}$$

splňující podmínku $y(0) = 1$, a jejich definiční obory.

5) (10 bodů) Nechť $f, g : (0,1) \to [0,\infty)$ jsou spojité funkce.

A) Nechť konvergují $\int_0^1 f$ a $\int_0^1 g$. Konverguje pak $\int_0^1 \max(f,g)$?

B) Nechť divergují $\int_0^1 f$ i $\int_0^1 g$. Diverguje pak $\int_0^1 \min(f,g)$?

Místo 3) může být například:

3') (10 bodů) Nalezněte délku křivky $y = x^2$ pro $x \in [0, 4]$.

Ústní část zkoušky

Během zkouškového období bude vypsáno minimálně 5 termínů pro ústní zkoušku a právě jeden termín bude vypsán v září. Student si na zkoušce vylosuje sadu čtyř otázek. Po zhruba 30 minutách na přípravu začíná zkoušení. Pokud nemá student ještě nějaké otázky vypracované, tak dostane po prozkoušení již připraveného čas na jejich dokončení. K vypracování odpovědí nelze používat jiné pomůcky než psací potřeby. Odpovědi jsou zhodnoceny a obodovány zkoušejícím.

Skladba otázek a počty bodů :

1) Klíčový pojem (neboduje se)
2) Tři definice nebo znění věty (každá otázka za 4 body)
3) Lehká věta a důkaz (4 body za znění a 8 bodů za důkaz)
4) Těžká věta a důkaz (4 body za znění a 12 bodů za důkaz)

Seznamy klíčových pojmů, definic, lehkých a težkých vět budou k dispozici na konci semestru. Za nezbytnou součást znalosti definic respektive vět se považuje jejich porozumění a schopnost je používat. Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu a získání alespoň 25 bodů z této části ústní části.

Pokud je součet bodů za písemnou a ústní část alespoň 60 bodů, dostane student ještě doplňkovou otázku na implikace za maximálně 10 bodů.

Vzor zadání otázek

Ústní zkouška:

1) Riemannův integrál (0 bodů)
2) norma dělení, Cauchyovo odmocninové kritérium, o existenci řešení separované rovnice (12 bodů)
3) kritérium existence R integrálu (12 bodů)
4) Leibnitzovo kritérium (16 bodů)

Implikace:

I) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí? Příslušná tvrzení dokažte, nebo uveďte protipříklad.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje .
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje .
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje .

Celkové hodnocení zkoušky

1) Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu.
2) Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 25 bodů z písemné zkoušky, alespoň 25 bodů z ústní zkoušky a prokáže znalost klíčového pojmu.
3) K celkovému hodnocení známkou výborně je potřeba získat alespoň 85 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.
4) K celkovému hodnocení známkou velmi dobře je potřeba získat alespoň 70 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.

Seznam klíčových pojmů

- supremum, infimum
- derivace funkce v bodě
- konvergentní a divergentní řada
- primitivní funkce
- horní a dolní Riemannovské součty, Riemannův integrál
- Newtonův integrál
- řešení ODR
- fundamentální systém řešení ODR
- metrický prostor
- otevřená a uzavřená množina v metrickém prostoru

Definice

- absolutně konvergentní řada
- přerovnání řady
- Cauchyovský součin řad
- limita posloupnosti a součet řady v komplexním oboru
- racionální funkce jedné a dvou proměnných
- dělení intervalu $[a, b]$
- zjemnění dělení
- norma dělení
- stejnoměrně spojitá funkce
- délka křivky
- ODR n-tého řádu
- rozšíření řešení ODR
- spojitá funkce více proměnných
- lokálně lipschitzovská funkce vůči y
- Lineární ODR řádu n
- Systém ODR prvního řádu
- charakteristický polynom
- fundamentální matice soustavy $y' = Ay$
- vnitřek množiny
- hranice a uzávěr množiny
- spojitá funkce na metrickém prostoru

Lehké věty

Ještě budou vyřazeny 3 důkazy podle přání studentů (znění je potřeba umět).

- nutná podmínka konvergence řady
- srovnávací kritérium konvergence řad
- limitní srovnávací kritérium konvergence řad
- Cauchyovo odmocninové kritérium
- d'Alambertovo podílové kritérium
- Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence řad
- vztah konvergence a absolutní konvergence
- vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady
- o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu
- integrace per partes
- první věta o substituci
- druhá věta o substituci
- o zjemnění dělení
- o dvou děleních
- kritérium existence R integrálu

- o vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti
- vztah monotonie a Riemannovské integrovatelnosti
- srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu
- limitní srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu
- věta o střední hodnotě integrálního počtu
- integrální kritérium konvergence řad
- o řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu
- prostor řešení systému ODR 1. řádu
- FSŘ pro soustavu rovnic s konstantními koeficienty
- tvar řešení pro soustavu ODR
- vlastnosti otevřených množin
- vlastnosti uzavřených množin
- charakterizace vnitřku
- uzávěr a uzavřené množiny
- vlastnosti uzávěru
- charakterizace spojitosti
- spojitost složeného zobrazení

Těžké věty

Ještě budou vyřazeny 2 důkazy podle přání studentů (znění je potřeba umět).

- kondenzační kritérium
- Leibnitzovo kritérium
- Abel-Dirichletovo kritérium
- o přerovnání absolutně konvergentní řady
- Riemann (bez důkazu)
- o součinu řad
- nutná podmínka existence primitivní funkce
- aproximace R integrálu pomocí součtů
- o vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti
- o derivaci integrálu podle horní meze
- Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu
- délka křivky
- objem a povrch rotačního tělesa - bez důkazu
- Peano s $y^{(n)}$ - bez důkazu
- o existenci řešení separované rovnice
- o existenci řešení systému ODR 1. řádu - bez důkazu
- FSŘ pro rovnici n-tého řadu s konstantními koeficienty