Písemka A

17. dubna 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní.

1. Zjistěte, pro která $p \in [1, \infty]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definuje formule
$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x(n), \quad x = \{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p,$$
spojitý lineární funkcionál na ℓ^p. Pro tato α a p zjistěte, zdali příslušný funkcionál nabývá své normy.

2. (a) Nechť $p \in (1, \infty)$. Zjistěte, zdali formule
$$Tf(x) = \int_x^1 tf(t), \quad x \in [0,1], f \in L^p([0,1]),$$
definuje spojitý lineární operátor na $L^p([0,1])$.
   (b) Zjistěte, zda je kompaktní. (Ukažte, že T vede dokonce do $C([0,1])$, a tedy ho lze uvažovat jako složení dvou operátorů, z nichž první je kompaktní a druhý spojitý.)
   (c) Nalezněte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$. (Převeďte integrální rovnici na rovnici diferenciální.)

3. Nechť $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ a F je Fourierova transformace. Definujme otočení $\check{u}$ jako $\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi})$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Řekneme, že u je lichá, pokud $\check{u} = -u$ a u je sudá, pokud $\check{u} = u$.
   (a) Nechť $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že je-li u lichá, je Fu též lichá. Dále odvoďte, že $F(u') = (ig)Fu$.
   (b) Nechť sgn značí funkci $\operatorname{sgn} x$, δ_0 je Diracova míra v 0 a c značí konstantní funkci rovnou c. Nechť $u_{1/x}$ značí distribuci definovanou jako
$$u_{1/x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$
   Ukažte, že $(u_{\mathrm{sgn}})' = 2u_{\delta_0}$. Za pomoci bodu (a) pak odvoďte, že
$$(\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} g)(F(u_{\mathrm{sgn}})) = u_1.$$
   (c) Ukažte, že u_{sgn}, $u_{1/x}$ jsou liché a u_{δ_0} je sudá.
   (d) Použijte fakt, že $gu = u_1$ právě tehdy, když $u \in u_{1/x} + \operatorname{span}\{u_{\delta_0}\}$ k odvození toho, že
$$F(u_{\mathrm{sgn}}) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} u_{1/x} + cu_{\delta_0}$$
   pro nějaké $c \in \mathbb{C}$. Za pomoci bodů (a) a (c) ukažte, že $F(u_{\mathrm{sgn}}) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} u_{1/x}$.