Příklad A1

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x(n) \quad , x \in \ell^p \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ p \in [1,\infty])$$

① $p=1$: • je-li $\alpha \leq 0$, je $(n^{\alpha})_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$, $\|(n^{\alpha})\|_{\infty} = 1$

$\Rightarrow$ dle Věty II.21 je $T \in (\ell^1)^*$, $\|T\| = 1$

Normy se nabývá v bodě $e_1 = (1,0,0,\dots)$,

protože $\|e_1\|_1 = 1$ a $Te_1 = 1$

• je-li $\alpha > 0$, není T spojitý lineární funkcionál na ℓ^1, například protože $Te_n = n^{\alpha} \to \infty$

(kromě toho T není definován na celém ℓ^1,) např. v bodě $\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)_{n=1}^{\infty}$ T není definováno

② $p \in (1,\infty)$ • Pokud $(n^{\alpha})_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$ $\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\right)$,

pak $T \in (\ell^p)^*$ a $\|T\| = \|(n^{\alpha})\|_q$

dle Věty II.21 Normy se nabývá, protože

ℓ^p je reflexivní

$(n^{\alpha}) \in \ell^q \Leftrightarrow \sum n^{\alpha q} < \infty \Leftrightarrow \alpha q < -1$

$q = \frac{p}{p-1}$, tj. je to ekviv. $\frac{\alpha p}{p-1} < -1$

• $\frac{\alpha p}{p-1} \geq 1$ $\quad X^k := \left(1, \frac{1}{2^{\alpha+1}}, \dots, \frac{1}{k^{\alpha+1}}, 0, \dots\right)$

$$\frac{|T(x^k)|}{\|x^k\|_p} \to \infty \quad \Leftarrow \begin{cases} \text{Pak } T(x^k) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \\ \|x^k\|_p = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^{(\alpha+1)p}}\right)^{1/p} \leq \left(1 + \dots + \frac{1}{k}\right)^{1/p} \end{cases}$$

$\alpha p \geq -p+1 \Rightarrow (\alpha+1)p \geq 1$

③ $p = \infty$. V případě, že $\alpha < -1$, je

$$|Tx| \le \|x\|_\infty \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha}_{<\infty} \Rightarrow \|T\| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha$$

norma se nabývá na posloupnosti $(1,1,1,\dots)$

• $\alpha \ge -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha = \infty \Rightarrow T$ není definován

na bodě $(1,1,\dots)$

<u>Příklad A2</u> $(p \in (1,\infty))$ $\quad Tf(x) = \int_x^1 t f(t)\, dt$, $x \in [0,1]$, $f \in L^p([0,1])$

(a) T je spojitý operátor $L^p([0,1])$ do $L^p([0,1])$

q buď sdružený exponent

$$\int_x^1 |t f(t)|\, dt \le \left(\int_x^1 t^q dt\right)^{1/q} \left(\int_x^1 |f|^p\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\left[\frac{t^{q+1}}{q+1}\right]_x^1\right)^{1/q} \cdot \|f\|_p = \left(\frac{1-x^{q+1}}{q+1}\right)^{1/q} \cdot \|f\|_p$$

$\Rightarrow Tf(x)$ je dobře definováno, integrál zadání konverguje

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^1 |Tf(x)|^p dx \le \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{1-x^{q+1}}{q+1}\right)^{p/q}}_{\text{spojitá na } [0,1] \Rightarrow \text{ omezená, tedy integrovatelná}} \|f\|_p^p$$

Tedy T je spojitý, $\|T\| \le \left(\int_0^1 \left(\frac{1-x^{q+1}}{q+1}\right)^{p/q}\right)^{1/p}$

(b) T je kompaktní: $T = T_1 T_2$, kde $T_2 : L^p([0,1]) \to C([0,1])$ dán stejným vzorcem jako T, $T_1 : C([0,1]) \to L^p([0,1])$ je „identita"

- T_1 je omezený: $g \in C([0,1]) \Rightarrow \|Tg\|_p = \|g\|_p = \left(\int_0^1 |g|^p\right)^{1/p} \le \|g\|_\infty$

  $\Rightarrow \|T_1\| \le 1$

- T_2 vede do $C([0,1])$:

  $$x < y \Rightarrow |T_2 f(x) - T_2 f(y)| = \left| \int_x^y t f(t)\, dt \right| \le$$

  $$\int_x^y |t f(t)|\, dt \le \left(\int_x^y t^q\right)^{1/q} \cdot \left(\int_x^y |f|^p\right)^{1/p} \le$$

  $$\le (y-x)^{1/q} \|f\|_p$$

  Odtud plyne
  - $T_2 f \in C([0,1])$
  - $\|f\|_p \le 1 \Rightarrow |T_2 f(y) - T_2 f(x)| \le (y-x)^{1/q}$

    odtud plyne, že $T_2(B_{L^p([0,1])})$ je stejně spojitá
  - $T_2 f(1) = 0$ vždy $\Rightarrow$ pro $\|f\|_p \le 1$ je

    $|T_2 f(x)| = |T_2 f(1) - T_2 f(x)| \le (1-x)^{1/q} \le 1$

    $\Rightarrow \|T_2\| \le 1$

  $\Rightarrow$ dle Arzelà–Ascoliho věty je T_2 kompaktní,

tedy $T = T_1 T_2$ je také kompaktní.

<u>Poznámka:</u> <u>Řešení</u> (a) lze odvodit z uvedeného řešení (b)

(c) $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$

• $\sigma_p(T)$: $\lambda \neq 0$: řešíme rovnici $Tf = \lambda f$, tj.

$$\int_x^1 t f(t)\,dt = \lambda f(x) \quad , \quad x \in [0,1] \quad (\text{skoro všude})$$

Protože Tf je spojitá (viz řešení (b)), odsud plyne, že f je také spojitá (tj. ta třída ekvivalence má spojitého reprezentanta)

Pak $(\lambda f)'(x) = -x f(x)$ ... diferenciální rovnice ... poč. podmínka $f(1) = 0$

$$\lambda f'(x) + x f(x) = 0$$

$f' = -\frac{x}{\lambda} f$ ... Ale zřejmě nulová fce je řešením, z jednoznačnosti řešení lin. dif. rovnic 1. řádu plyne, že to je jediné řešení splňující $f(1) = 0$

$\Rightarrow$ žádné $\lambda \neq 0$ není vlastním číslem

$\lambda = 0$: $Tf = 0$ $\quad \int_x^1 t f(t)\,dt = 0 \Rightarrow t f(t) = 0$ s.v.

$\Rightarrow f = 0$ s.v.

$\Rightarrow T$ prostý

Tedy $\sigma_p(T) = \emptyset$

• $\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\} = \{0\}$ (z kompaktnosti T)

$\sigma(T) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \sigma(T) = \{0\}$

<u>Příklad 13</u> $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, F Fourierova transformace

(a) u lichá $\Rightarrow$ $F(u)$ lichá

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}): \quad \widecheck{F(u)}(\varphi) = F(u)(\check{\varphi}) = u\left(F(\check{\varphi})\right)$$

$$-F(u)(\varphi) = u\left(-F(\varphi)\right) = -u(F(\varphi)) = \check{u}(F(\varphi))$$

Stačí tedy dokázat $F(\check{\varphi}) = \widecheck{F(\varphi)}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$F(\check{\varphi})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \check{\varphi}(x) e^{-itx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-x) e^{-itx}\, dx$$

$$\underset{y=-x}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{ity}\, dy = F(\varphi)(-t) = \widecheck{F(\varphi)}(t)$$

$g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ ... $F(u') = (ig)\cdot F(u)$

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow F(u')(\varphi) = u'\left(F(\varphi)\right) = -u\left(\underline{(F(\varphi))'}\right) =$$

$$= -u\left(-ig\, F(\varphi)\right) = +ig\, u(F(\varphi)) = +ig\, F(u)(\varphi)$$

(b) $(u_{sgn})' = 2u_{\delta_0}$:

$$\varphi \in \mathcal{S}(x): \quad (u_{sgn})'(\varphi) = -u_{sgn}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x \cdot \varphi'(x)\, dx$$

$$= -\left(\int_0^{\infty} \varphi'(x)\, dx - \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx\right) = -\left([\varphi]_0^{\infty} - [\varphi]_{-\infty}^{0}\right) - (0 - \varphi(0) - \varphi(0) + 0)$$

$$= 2\varphi(0) = 2u_{\delta_0}(\varphi)$$

$$\left(i\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\, g\right) F(u_{sgn}) = u_1:$$

$$\left(i\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\cdot g\right) F(u_{sgn}) \overset{(a)}{=} \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, F(u_{sgn}') = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, F(2u_{\delta_0}) = \sqrt{2\pi}\, F(u_{\delta_0})$$

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: $\sqrt{2\pi}\, F(u_{\delta_0})(\varphi) = \sqrt{2\pi}\, u_{\delta_0}(F(\varphi)) = \sqrt{2\pi}\, F(\varphi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\cdot 0}\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = u_1(\varphi)$$

substituo $t \mapsto -t$

(c) $\check{\mu}_{sgn}(\varphi) = \mu_{sgn}(\check{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x \cdot \varphi(-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(-t)\,\varphi(t)\,dt$

$= -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} t \cdot \varphi(t)\,dt = -\mu_{sgn}(\varphi)$

$\check{\mu}_{1/x}(\varphi) = \mu_{1/x}(\check{\varphi}) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\check{\varphi}(t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(-t)}{t}\,dt$

$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(t)}{-t}\,dt = -\mu_{1/x}(\varphi)$

substituce $t \mapsto -t$

$\check{\mu}_{\delta_0}(\varphi) = \mu_{\delta_0}(\check{\varphi}) = \check{\varphi}(0) = \varphi(0) = \mu_{\delta_0}(\varphi)$

(d) Spočtěme $\mathcal{F}(\mu_{sgn})$:

Dle (5) víme, že $g \cdot F(\mu_{sgn}) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu_1$

Tedy dle Faktu, co máme použít je

$F(\mu_{sgn}) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu_{1/x} + c\,\mu_{\delta_0}$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$

μ_{sgn} je lichá dle (c), tedy dle (a) je $F(\mu_{sgn})$ lichá.

$\mu_{1/x}$ je lichá dle (c)

$\Rightarrow c\,\mu_{\delta_0}$ je lichá též (jako rozdíl lichých)

Ale $c\,\mu_{\delta_0}$ je sudá dle (c), tedy $c\,\mu_{\delta_0} = 0$

$\Rightarrow c = 0.$