Příklad C1

$K = [-1,1] \times [-1,1]$

$T_1 f = \int_K xy\, f(x,y)\, dx\, dy \quad , f \in C(K)$

$T_2 f = \text{— " —} \quad , f \in L^\infty(K)$

T_1, T_2 jsou spojité lineární funkcionály

$$\int_K |xy\, f(x,y)|\, dx\, dy \le \|f\|_\infty \int_K |x|\cdot|y|\, dx\, dy =$$

$$= \|f\|_\infty \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x|\cdot|y|\, dx\, dy = \|f\|_\infty \left(\int_{-1}^{1}|x|\,dx\right)\cdot\left(\int_{-1}^{1}|y|\,dy\right) =$$

$$= \|f\|_\infty \cdot \left(2\int_0^1 x\, dx\right)^2 = \|f\|_\infty \left(2\cdot \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^1\right)^2$$

$$= \|f\|_\infty \left(2 \cdot \tfrac{1}{2}\right)^2 = \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow T_1 f$ i $T_2 f$ dobře def., $|T_j f| \le \|f\|_\infty$

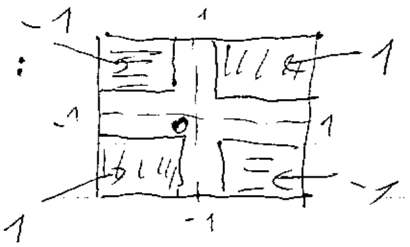
T_1, T_2 jsou zřejmě lineární (z linearity integrálu)

Z nerovnosti plyne $\|T_1\| \le 1$, $\|T_2\| \le 1$

$\|T_2\| = 1$ a norma se nabývá na funkci $f(x,y) = \operatorname{sgn}(xy)$

Pak totiž $\|f\|_\infty = 1$ a $T_2 f = \int_K |xy|\, dx\, dy = 1$

$\|T_1\| = 1$ také:



$\varepsilon > 0 \Rightarrow$ existuje

$f : K \to [-1,1]$

$f = 1$ na $[\varepsilon,1]\times[\varepsilon,1] \cup [-1,-\varepsilon]\times[-1,-\varepsilon]$

$f = -1$ na $[-1,-\varepsilon]\times[\varepsilon,1] \cup [\varepsilon,1]\times[-1,-\varepsilon]$

Taková f existuje např. díky lemmatu II.26(b)

nebo takto: $g(t) := \max\left(-1, \min\left(\frac{t}{\varepsilon}, 1\right)\right)$ a $f(x,y) = g(x)\cdot g(y)$

$$T_1 f = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy f(x,y)\,dx\,dy = \int_{([-1,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,1])\times([-1,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,1])} |x|\cdot|y|\,dx\,dy + \int_{\text{doplněk}} xy f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\geq \Big(2\int_{\varepsilon}^{1} x\,dx\Big)^2 - \lambda^2(\text{doplněk}) =$$

Fubiniho věta, viz výpočet prvního odhadu výše

$|xy f(x,y)| \leq 1$

$$= \Big(2\cdot\frac{\cancel{1}^2-\varepsilon^2}{2}\Big)^2 - \big(4\varepsilon^2 + 4\cdot 2\varepsilon(1-\varepsilon)\big) =$$

$$= (1-\varepsilon^2)^2 - 4\varepsilon^2 - 8\varepsilon(1-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \|T_1\| \geq (1-\varepsilon^2)^2 - 4\varepsilon^2 - 8\varepsilon(1-\varepsilon) \longrightarrow 1 \text{ pro } \varepsilon \to 0+$$

Tedy $\|T_1\| \geq 1$, tj. $\|T_1\| = 1$

T_1 svou normu nenabývá: Nechť $f \in C(K)$, $\|f\|_\infty \leq 1$.

Pokud $f(0,0) \leq 0$, pak ex. $\varepsilon > 0$, že $f(x,y) < \frac{1}{2}$ na $[-\varepsilon,\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$

$\cancel{\Rightarrow}$ Pak $T_1 f = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy f(x,y) = \int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(x,y)xy\,dx\,dy + \int_{\text{doplněk}} xy f(x,y)\,dy\,dx +$

$$\leq \int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{2}xy + \int_{\text{doplněk}} |x||y|\,dx\,dy = \int_K |x||y|\,dx\,dy - \int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{2}xy\,dx\,dy$$

$$< \int_K |x||y|\,dx\,dy = 1$$

Pokud $f(0,0) \geq 0$, ex. $\varepsilon > 0$, že $f(x,y) > -\frac{1}{2}$ na $[-\varepsilon,\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$

a postupujeme stejně, jen dáme zvlášť $[-\varepsilon,0]\times[0,\varepsilon]$. Opět vyjde $T_1 f < 1$

Příklad C2 $\quad Tf(t) = i f(t) + t^2 \int_0^1 f(\tau)\,d\tau$, $t \in [0,1]$

$f \in L^1([0,1])$

(a) T je spojitý lineární operátor $L^1([0,1])$ do $L^1([0,1])$:

$T = T_1 + T_2$, $T_1 f = i f$

$T_2 f(t) = t^2 \cdot \int_0^1 f(\tau)\,d\tau$

- T_1 je lineární, $\|T_1 f\|_1 = \|f\|_1$ ∴ T_1 je izometrie L^1 na L^1
- T_2 je 1-dimenzionální operátor

Funkce $g(t) = t^2$ je v L^1 $\left(\|g\|_1 = \int_0^1 |t^2|\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \right)$

$\varphi(f) = \int_0^1 f(\tau)\,d\tau$ je lineární funkcionál na L^1, normy 1

$\left(|\varphi(f)| \le \int_0^1 |f| \le \|f\|_1 \right)$ ... též z věty II.23

Tedy T je lineární operátor

$\Big(Tf = T_1 f + \varphi(f) \cdot g$

$\|Tf\|_1 \le \|T_1 f\|_1 + \|\varphi(f)\, g\|_1 \le \|f\|_1 + |\varphi(f)| \cdot \|g\|_1 \le$

$\le \|f\|_1 + \|\varphi\|\, \|f\|_1\, \|g\|_1 \le \left(1 + \frac{1}{3}\right)\|f\|_1 \Big)$

(b) Je T kompaktní? Není, protože $T = T_1 + T_2$,

kde T_2 je 1-dimenzionální, a tedy kompaktní,

T_1 je izometrie L^1 na L^1, tedy není kompaktní $(T_1(B_{L^1}) = B_{L^1})$

kdyby T byl kompaktní, pak by i $T_1 = T - T_2$ musel být kompaktní,

což není.

(c) $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$

$\sigma_p(T)$: $Tf = \lambda f$

$$\lambda f(x) = i f(x) + x^2 \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$(\lambda - i) f(x) = x^2 \cdot \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\lambda \neq i \Rightarrow f(x) = x^2 \cdot \frac{1}{\lambda - i} \int_0^1 f(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ musí byť násobok x^2, teda funkcia $g(x) = x^2$ musí byť vlastný vektor

Spočítame $Tg(x) = i g(x) + x^2 \cdot \int_0^1 t^2\,dt = i x^2 + x^2 \cdot \frac{1}{3} = (\frac{1}{3} + i) x^2$

teda jediné vlastné číslo rôzne od i je $\frac{1}{3} + i$

$\lambda = i$: $x^2 \cdot \int_0^1 f(t)\,dt = 0$

Takéto f existujú, napríklad $f = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{(\frac{1}{2},1]}$

(a takých dokonca, každý nenulový prvok $\operatorname{Ker} \varphi$ je vlastný vektor)

Teda $\sigma_p(T) = \{i, \frac{1}{3} + i\}$

$\sigma(T)$; $T = T_1 + T_2 = i\underline{I} + T_2$

$$\lambda \underline{I} - T = \lambda \underline{I} - i\underline{I} - T_2 = (\lambda - i)\underline{I} - T_2$$

Teda : $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda - i \in \sigma(T_2)$, t.j. $\sigma(T) = i + \sigma(T_2)$

podobne tiež $\sigma_p(T) = i + \sigma_p(T_2)$

Pritom T_2 je kompaktný, teda $\sigma(T_2) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T_2)$

Pričom $\sigma_p(T_2) = -i + \sigma_p(T) = \{0, \frac{1}{3}\}$ $\Rightarrow \sigma(T_2) = \{0, \frac{1}{3}\}$

Teda $\sigma(T) = \sigma(T_2) + i = \{i, \frac{1}{3} + i\}$.

Příklad C3 $\quad \mu_{1/x}(\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$g(x) = x, \; x \in \mathbb{R}$

(a) $g\,\mu_{\delta_0} = 0, \quad g\,\mu_{1/x} = \mu_1$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \quad (g\mu_{\delta_0})(\varphi) = \mu_{\delta_0}(g\varphi) = g(0)\varphi(0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0$

$$(g\mu_{1/x})(\varphi) = \mu_{1/x}(g\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{g(x)\cdot\varphi(x)}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \mu_1(\varphi)$$

(b) $\alpha, \beta : X \to \mathbb{C}$ lineární zobrazení

- $\beta \in \operatorname{span}\{\alpha\} \Rightarrow \beta = c \cdot \alpha$ pro nějaké $c \in \mathbb{C} \Rightarrow \ker \alpha \subset \ker \beta$
  $(\alpha(x) = 0 \Rightarrow \beta(x) = c \cdot 0 = 0)$

- $\ker \alpha \subset \ker \beta$. Pokud $\ker \beta = X$, je $\beta = 0 \in \operatorname{span}\{\alpha\}$

  Nechť $\ker \beta \neq X$. Zvolme $x_0 \in X \setminus \ker \beta \subset X \setminus \ker \alpha$

  $x \in X \Rightarrow x - \frac{\alpha(x)}{\alpha(x_0)} x_0 \in \ker \alpha \subset \ker \beta$

  $\Rightarrow \beta\left(x - \frac{\alpha(x)}{\alpha(x_0)} x_0\right) = 0 \Rightarrow \beta(x) = \frac{\beta(x_0)}{\alpha(x_0)} \cdot \alpha(x)$

  $\Rightarrow \beta \in \operatorname{span}\{\alpha\}$.

(c) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \; \varphi(0) = 0$

$\psi(x) := \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt, \; x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \psi \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad$ (derivace dle parametru

Označme $\theta(t,x) = \varphi'(tx)$

pak θ je C^∞ na $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^n}{\partial x^n}\theta(t,x) = t^n \varphi'(tx)$

a $|t^n \varphi'(tx)| \leq \max\limits_{u \in \mathbb{R}} |\varphi'(u)| < \infty$)

$\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\quad \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt = \left[\frac{\varphi(tx)}{x} \right]_0^1 =$

$= \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{\varphi(x)}{x}$ pro $x \neq 0$

$\psi(0) = \int_0^1 \varphi'(0)\,dt = \varphi'(0)$

$\Rightarrow \operatorname{spt} \psi \subset \operatorname{spt} \varphi$

Rovnost $\varphi(x) = x\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ plyne z výpočtu (pro $x \neq 0$ z ↑, pro $x=0$ je to $0 = 0 \cdot \varphi'(0)$)

(d) $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $g\mu = 0 \Rightarrow \mu \in \operatorname{span}\{\mu_{\delta_0}\}$

Chceme použít (b) a (c). Dle (b) stačí ukázat, že $\operatorname{Ker} \mu_{\delta_0} \subset \operatorname{Ker} \mu$. To zkusme dokázat z (c):

$\varphi \in \operatorname{Ker} \mu_{\delta_0} \Rightarrow \mu_{\delta_0}(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$. Nechť ψ je z (c).

Pak $\mu(\varphi) \underset{\text{volím } \psi \text{ dle (c)}}{=} \mu(g\psi) = (g\mu)(\psi) = 0$

Tedy $\varphi \in \operatorname{Ker} \mu$.

(e) $g\mu = \mu_1 \Rightarrow \mu \in \mu_{1/x} + \operatorname{span}\{\mu_{\delta_0}\}$

$g\mu = \mu_1$; dle (a) $g\mu_{1/x} = \mu_1 \quad \Rightarrow g(\mu - \mu_{1/x}) = 0$

Tedy dle (d) je $\mu - \mu_{1/x} \in \operatorname{span}(\mu_{\delta_0})$. A to je ono.