Písemka D

11. února 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní. Též si uvědomte, že prvky L^p prostorů jsou třídy ekvivalence dané rovností skoro všude.

1. Nechť $X = L^2([-\pi,\pi])$, $Y = \{f \in X\colon f \text{ je spojitá}\}$ a $\widetilde{R}f(x) = f(-x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, $f \in Y$.
   (a) Ukažte, že existuje právě jeden operátor $R \in L(X)$ splňující $Rf = \widetilde{R}f$ pro $f \in Y$.
   (b) Nechť $P = \frac{1}{2}(I+R)$ a $X_S = \{f \in X\colon Rf = f\}$. Ukažte, že P je projekce X na X_S.
   (c) Nechť $X_L = \{f \in X\colon Rf = -f\}$. Ukažte, že $X = X_S \oplus_t X_L$ a $X_L = (X_S)^\perp$. (Fakt, že $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi = 0$ pro lichou funkci φ, nemusíte dokazovat.)
   (d) Spočtěte $\operatorname{dist}(f, X_L)$, kde $f(x) = e^x$, $x \in [-\pi,\pi]$.

2. (a) Nechť $g(x) = \max\{0, x\}$, $x \in [-1,1]$. Zjistěte, pro která $r \in [1,\infty)$ formule
$$(T_r f)(x) = g(x)f(x), \quad x \in [-1,1], \quad f \in L^r([-1,1]),$$
   definuje spojitý lineární operátor na $L^r([-1,1])$.
   (b) Pro příslušná r nalezněte $\sigma_p(T_r)$ a $\sigma(T_r)$.
   (c) Pro příslušná r zjistěte, zda je T_r kompaktní.

3. Nechť F značí Fourierovu transformaci, $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$ a
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & x = 0.\end{cases}$$
   (a) Ukažte, že $Ff = g$.
   (b) Ukažte, že pro $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ platí
$$\int_{\mathbb{R}} |u|\, dm_1 \leq \sup\{\left|\int_{\mathbb{R}} (\varphi u)\, dm_1\right| : \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \leq 1\}.$$
   (Zvažte následující návod. Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravá strana větší nebo rovna než $\int_{-n}^{n} |u|$ takto: Položte $v = \operatorname{sgn} u \cdot \chi_{(-n,n)}$ a shlaďte v pomocí aproximativní jednotky $\{h_j\}$. Vzniklé funkce vezměte do úvahy při důkazu požadované nerovnosti.)
   (c) Ukažte, že neexistuje $C > 0$ splňující $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R},m_1)} \leq C\,\|F\varphi\|_\infty$ pro každé $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. (Předpokládejte existenci takové konstanty a uvažujte funkci g z bodu (a). Nechť $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ má supremovou normu nejvýše 1. Ukažte, že
$$\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi g\, dm_1\right| \leq \|f\|_\infty \|F\varphi\|_{L^1(\mathbb{R},m_1)} \leq C\,\|f\|_\infty.$$
   Použitím (b) dostanete spor. Fakt, že $g \notin L^1(\mathbb{R}, m_1)$, nemusíte dokazovat.)
   (d) Odvoďte z (c), že $F\colon L^1(\mathbb{R},m_1) \to C_0(\mathbb{R})$ není surjektivní. (Vezměte do úvahy Větu o otevřeném zobrazení.)