Příklad D1 $\quad X = L^2([-\pi,\pi])$

$Y = \{ f \in X : f \text{ je spojitá na } [-\pi,\pi] \}$

$\tilde{R} f(t) = f(-t), \ t \in [-\pi,\pi], \ f \in Y$

(a) $\tilde{R}$ je izometrie Y na Y $\quad$ ($\|f\|_2 = \|\tilde{R} f\|_2$ z věty o substituci)

Y je hustý v X $\Rightarrow \exists!\, R \in \mathcal{L}(X)$ rozšiřující $\tilde{R}$ (Věta I.15)

To, že Y je hustý v X plyne např. z teorie Fourierových řad, protože funkce $(e^{-int})_{n \in \mathbb{Z}}$ jsou spojité a tvoří ON bázi X.

(b) $P := \frac{1}{2}(I + R)$, $\quad X_S = \{ f \in X : Rf = f \}$

Pak P je projekce X na X_S

Zřejmě platí $\tilde{R}\tilde{R} = I$ na Y, tedy i $R \cdot R = I$ na X

Proto platí:

$f \in X \Rightarrow Pf \in X_S$

$\left[\, R(Pf) = R\left(\frac{1}{2}(f + Rf)\right) = \frac{1}{2}(Rf + R^2 f) = \right.$

$\left. = \frac{1}{2}(Rf + f) = Pf \,\right]$

$f \in X_S \Rightarrow Pf = f$

$\left[\, Pf = \frac{1}{2}(f + Rf) = \frac{1}{2}(f + f) = f \,\right]$

(c) $X_L = \{ f \in X ;\ Rf = -f \}$

Pak $X_S \oplus_t X_L = X$, protože $X_L = \ker P$

$\left[\, f \in \ker P \Leftrightarrow Pf = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(f + Rf) = 0 \right.$

$\left. \Leftrightarrow Rf = -f \Leftrightarrow f \in X_L \,\right]$

Navíc $X_L = (X_S)^{\perp}$. Stačí $X_L \perp X_S$, protože

$X_L + X_S = X$. K tomu stačí: $f \in X \Rightarrow Pf \perp (I-P)f$

$(g \in X_L,\ h \in X_S \Rightarrow f = g + h,\ g = (I-P)f,\ h = Pf)$

Protože Y je hustý, stačí to dokázat pro $f \in Y$

$f \in Y \Rightarrow Pf$ je sudá spojitá funkce, $(I-P)f$ je lichá spojitá funkce

$$\Rightarrow \langle Pf, (I-P)f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{Pf \cdot \overline{(I-P)f}}_{\text{lichá funkce}} = 0$$

(d) $\operatorname{dist}(f, X_L)$. $f(t) = e^t$, $t \in [-\pi, \pi]$

$(I-P)$ je projekce (OG) na X_L

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(f, X_L) = \|f - (I-P)f\|_2 = \|Pf\|_2 = \|\tfrac{1}{2}(f + Rf)\|_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} (e^x + e^{-x})^2 \, dx\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\pi\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2} - \frac{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}{2} + 2\pi\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{e^{2\pi} - e^{-2\pi} + 2\pi}$$

Příklad D2 $\quad g(t) = \max\{0, t\}, \ t \in [-1,1]$

$$(T_r f)(t) = g(t) f(t), \ t \in [-1,1], \ f \in L^r([-1,1]) \quad (r \in [1,\infty))$$

(a) T_r je spojitý lineární operátor v L^r:

$$f \in L^r \Rightarrow \int_{-1}^{1} |g(x) f(t)|^r \, dx \underset{|g(t)| \le 1}{\le} \int_{-1}^{1} |f(t)|^r \Rightarrow T_r f \ ~~je~~ \in L^r$$

$$\|T_r f\|_r \le \|f\|_r$$

T_r je zřejmě lineární, $\|T_r\| \le 1$

(b) $\sigma_p(T_r), \sigma(T_r)$:

$\sigma_p(T_r)$: $\quad T_r f = \lambda f$

$$g(x) f(t) = \lambda f(t) \quad \text{pro s.v. } x$$

$\lambda = 0 \ \ldots \ g(t) f(t) = 0$ s.v.

$$x \cdot f(t) = 0 \ \text{ s.v. na } [0,1]$$

$\Rightarrow$ například $\chi_{(-1,0)}$ je vlastní vektor,

$$(\chi_{(-1,0)} \in L^\infty \subset L^r) \Rightarrow 0 \in \sigma_p(T_r)$$

$\lambda \neq 0$

$\Rightarrow$ pro s.v. $t \in (-1,0)$: $\quad 0 = \lambda f(t) \Rightarrow f(t) = 0$

pro s.v. $t \in (0,1)$: $\quad t f(x) = \lambda f(x)$

$$(t - \lambda) f(t) = 0$$

$t = \lambda$ může platit jen pro jedno x

$\Rightarrow f(t) = 0$ s.v.

Tedy: $\sigma_p(T_r) = \{0\}$

$\sigma(T)$: víme již, že $0 \in \sigma(T)$

$\lambda \neq 0$ ... je $\lambda I - T$ na?

$h \in L^r \Rightarrow$ hledáme $f \in L^r$, že $\lambda f - Tf = h$

tj. $\lambda f(t) - g(t) f(t) = h(t)$ s.v.

na $(-1,0)$: $\lambda f(t) = h(t)$ s.v. $\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\lambda} h(t)$ s.v.

na $(0,1)$: $\lambda f(t) - t f(t) = h(t)$ s.v.

$\Rightarrow f(t) = \frac{h(t)}{\lambda - t}$ s.v.

Pokud ~~$\lambda < 0$ nebo $\lambda > 1$~~ $\lambda \notin [0,1]$, pak $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} h(t), & t \in (-1,0) \\ \frac{1}{\lambda - t} h(t), & t \in (0,1) \end{cases}$

patří do L^r a $(\lambda I - T) f = h$, protože

pak $\frac{1}{\lambda - t}$ je omezená na $[0,1]$.

Pokud $\lambda \in [0,1]$, pak fce $\frac{1}{\lambda - t}$ nepatří do L^r, protože

$\int_0^1 \frac{1}{(\lambda - t)^r} dt$ diverguje $(r \geq 1)$

Tedy například pro fci. $h(t) = 1$ se nic nezobrazí.

<u>Závěr</u>: $\sigma(T_r) = [0,1]$

(c) Je T_r kompaktní? Není, protože jinak by platilo

$\sigma(T_r) \subset \sigma_p(T_r) \cup \{0\}$, což neplatí.

Příklad D3: $f := \chi_{(-1,1)}$; $g(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin t}{t} & , t \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & , t = 0 \end{cases}$

F = Fourierova transf.

(a) $Ff = g$. To se prostě spočte:

$$Ff(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-itx}\, dx = \begin{cases} t=0: & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ t \neq 0: & = \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-itx}}{-it} \right]_{-1}^{1} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-it}}{-it} - \frac{e^{it}}{-it} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} = \frac{2 \cdot \sin t}{\sqrt{2\pi} \cdot t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin t}{t}$$

(b) $u \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $v_n(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -n] \cup [n, +\infty) \\ \text{komplexní jednotka, aby } v_n(x) \cdot u(x) = |u(x)| & \text{pro } x \in (-n, n) \end{cases}$

$$\text{Pak } \int_{-n}^{n} |u| \, dm_1 = \int_{-\infty}^{\infty} v_n \cdot u \, dm_1$$

Nechť (h_j) je aproximativní jednotka.

Uvažme $\varphi_{n,j} := v_n * h_j$. Protože $v_n \in L^1$, je

$\varphi_{n,j} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Navíc v_n i h_j mají kompaktní nosič, proto $\varphi_{n,j} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Navíc $\|\varphi_{n,j}\|_{\infty} \leq \|v_n\|_{\infty} \cdot \|h_j\|_1 \leq 1$

Tedy $\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_{n,j} \cdot u \, dm_1 \right|$ ~~se vyskytuje~~ se vyskytují v množině napravo.

Přitom $\varphi_{n,j} \xrightarrow{j\to\infty} v_n$ v L^1 (protože $v_n \in L^1$)

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi_{n,j} \cdot u \, dm_1 \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} v_n u \, dm_1 = \int_{-n}^{n} |u| \, dm_1$$

Przeto $\int_{-n}^{n} |u|\, dm_1 \le \sup \{ \dots \}$

$n \in \mathbb{N}$ dów. $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u|\, dm_1 \le \sup \{ \dots \}$

(c) Niech $\exists\, C > 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}): \ \|\varphi\|_{L^1(m_1)} \le C \cdot \|F\varphi\|_\infty$

Funkcja g z zadania jest mierzalna, i dla $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \le 1$ mamy

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi g\, dm_1 \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot (Ff)\, dm_1 \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (F\varphi) f\, dm_1 \right| \le$$

$$\le \|F\varphi\|_{L^1(m_1)} \cdot \|f\|_\infty \le C \cdot \|F(F\varphi)\|_\infty \|f\|_\infty$$

$$= C \cdot \|\check{\varphi}\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \le C \cdot \|f\|_\infty \le C \quad (\|\check{\varphi}\|_\infty = \|\varphi\|_\infty \le 1)$$

Tego dla (b) jest $\int_{\mathbb{R}} |g|\, dm_1 \le C$. Ale jest znane, że $g \notin L^1(m_1)$.
To jest sprz.

(d) Gdyby $F : L^1(\mathbb{R}, m_1) \to C_0(\mathbb{R})$ było na, byłoby to odwzorowanie zabronione. Ponieważ F jest proste, byłby to izomorfizmem.
Tego by istniała $C > 0$, że

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}, m_1): \ \|Ff\|_\infty \ge C \cdot \|f\|_1$$

ale $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}, m_1)$ a dla (c) takiej stałej nie istnieje.