Písemka E

25. března 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní.

1. Rozhodněte, které z následujících formulí definují lineární zobrazení z X do Y. U těch, které jsou lineární, zjistěte, zdali se jedná o prvek prostoru $L(X,Y)$. V těchto případech pak určete normu tohoto zobrazení a zjistěte, zda se jí nabývá.
   (a) Nechť $X = Y = \ell^\infty$ a $Tx = (x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6, \cdots)$, $x = (x_n) \in X$.
   (b) Nechť $X = Y = L^1([0,\infty))$ a $Tf(x) = e^{-x}f(x)$, $x \in [0,\infty)$, $f \in X$.
   (c) Nechť $X = c_0$, $Y = \mathbb{C}$ a $Tx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} x_n$, $x = (x_n) \in X$.
   (d) Nechť $X = Y = L^2(\mathbb{R}, m_1)$ a T je transformace z Plancherelovy věty (zvažte funkci $e^{-\frac{1}{2}x^2}$).
2. (a) Nechť $X = c_0$ a $Tx = (ix_1, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \frac{1}{5}x_5, \frac{1}{6}x_6, \cdots)$, $x \in X$. Ukažte, že tato formule definuje spojitý lineární operátor na X.
   (b) Zjistěte, zda je T kompaktní (uvažujte operátory
   $$T^k x = (ix_1, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \frac{1}{5}x_5, \frac{1}{6}x_6, \cdots, \frac{1}{k}x_k, 0, 0, 0, \cdots), \quad x \in X).$$
   (c) Najděte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.
3. Nechť F značí Fourierovu transformaci na $L^1(\mathbb{R}, m_1)$ a P transformaci na $L^2(\mathbb{R}, m_1)$ z Plancherelovy věty. Nechť
   $$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1,0), \\ 1, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus ((-1,0) \cup (0,1)). \end{cases}$$
   (a) Spočtěte Pf.
   (b) Ukažte, že Ff je v $L^2(\mathbb{R}, m_1)$.
   (c) Spočtěte $\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1-\cos t}{t}\right|^2 dt$ (uvažte Plancherelovu větu).
   (d) Nechť $u_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi f$, $\varphi \in \mathscr{S}$. Ukažte, že u_f je temperovaná distribuce a spočtěte její Fourierovu transformaci.