Úvod – co je funkcionální analýza a k čemu je dobrá
(a také obsah přednášky a znalosti potřebné předem)

Co je funkcionální analýza?

Funkcionální analýza je velmi široká oblast matematiky, která se prolíná s mnoha jinými partiemi. Mezi předměty jejího zájmu patří:

- Normované lineární prostory, zejména nekonečněrozměrné.
- Lineární zobrazení mezi těmito prostory (tj. operátory).
- Normované lineární prostory s dodatečnou strukturou (např. algebraickou – Banachovy algebry, Banachovy svazy atp.).
- Prostory abstraktnější než normované prostory (lineární topologické prostory atp.).
- A ještě leccos jiného.

K čemu to je dobré?

- Je to pěkné a zajímavé, stejně jako celá matematika.
- Dává to nové pohledy na matematické problémy různého druhu, umožňuje to problémy jinak formulovat a je to zdrojem účinných metod řešení. Hlavní výhodou funkcionální analýzy je asi skutečnost, že i s dost složitými objekty (jako jsou posloupnosti, funkce i rozličná zobrazení) umožňuje pracovat jako s body v prostoru s geometrickou strukturou. To se hodí například v následujících případech:
  - Lze formulovat a dokázat tvrzení, že většina spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$ nemá derivaci v žádném bodě.
  - Hledání řešení nějaké diferenciální rovnice lze pojmout jako hledání vhodného bodu ve vhodném prostoru.
  - Problém aproximace složité funkce jednodušší funkcí (třeba polynomem daného stupně) lze interpretovat jako hledání nejbližšího bodu ve vhodné množině.

Stručný obsah přednášky

I. Banachovy a Hilbertovy prostory – norma, normované prostory, Banachovy prostory a jejich příklady, spojitá lineární zobrazení, skalární součin a norma jím indukovaná, Hilbertovy prostory a jejich struktura

II. Spojité lineární funkcionály a dualita – Hahn-Banachova věta a její důsledky, kvocient normovaného prostoru, vztah kvocientů a podprostorů, druhý duál, kanonické vnoření do druhého duálu, reflexivita, reprezentace duálů klasických prostorů

III. Omezené lineární operátory – princip stejnoměrné omezenosti, Banach-Steinhausova věta, věta o otevřeném zobrazení, věta o uzavřeném grafu, projekce, topologické doplňky, komplementované podprostory, duální operátory, kompaktní operátory, spektrum operátoru, spektrální teorie kompaktních operátorů

IV. Teorie distribucí a Fourierova transformace – testovací funkce, slabé derivace, distribuce (příklady, operace s nimi), konvergence distribucí, řád distribuce, nosič distribuce, konvoluce funkcí, zhlazování a aproximativní jednotka, konvoluce distribucí, Schwartzův prostor, Fourierova transformace funkcí, temperované distribuce a Fourierova transformace

Orientační přehled potřebných znalostí

- Diferenciální počet jedné a několika reálných proměnných (limita, spojitost, derivace, parciální derivace, funkce třídy $\mathcal{C}^k$ a $\mathcal{C}^\infty$ atp.)
- Konvergence posloupností a řad reálných či komplexních čísel, konvergence posloupností a řad funkcí (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná)
- Integrální počet jedné reálné proměnné (primitivní funkce, určitý integrál)
- Lebesgueova míra a Lebesgueův integrál na $\mathbb{R}^d$
- Teorie míry a abstraktní Lebesgueův integrál, znaménkové míry, Hahnův rozklad, absolutní variace, Radon-Nikodýmova věta
- Vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$, lineární zobrazení
- Metrické prostory (metrika, spojitost, otevřené a uzavřené množiny, kompaktní prostory, úplné prostory, řídké množiny a množiny první kategorie, Baireova věta, borelovské množiny)
- Něco málo z teorie množin – spočetné a nespočetné množiny, Zornovo lemma

Další partie matematiky využívané v pokročilé funkcionální analýze

- Komplexní analýza (něco z ní je potřeba ve spektrální teorii, je zdojem příkladů Banachových prostorů i obecnějších typů prostorů, naopak i v ní se používají metody funkcionální analýzy)
- Obecná topologie (bez znalosti a porozumění topologickým pojmům jako jsou třeba kompaktnost, součinová topologie, báze okolí, je studium pokročilejší funkcionální analýzy těžko představitelné)
- Něco více z teorie množin (například ordinální čísla či některé principy nekonečné kombinatoriky jsou zdrojem zajímavých příkladů Banachových prostorů)
- Něco z algebry (hodí se při studiu Banachových algeber, C^*-algeber i obecnějších struktur)