I. Banachovy a Hilbertovy prostory
I.1 Základní značení, pojmy a příklady

Značení:
$\mathbb{R}$ ... těleso reálných čísel
$\mathbb{C}$ ... těleso komplexních čísel
$\mathbb{F}$ ... těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$
Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, nulový vektor značíme $\boldsymbol{o}$ (a někdy také 0).
Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $Y \subset\subset X$ znamená, že Y je podprostor X.

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ se nazývá **norma** na X, pokud pro každé $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}$ platí:

(i) $\|x\| = 0$ právě když $x = \boldsymbol{o}$.
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (**homogenita**)
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**trojúhelníková nerovnost**)

Je-li $\|\cdot\|$ norma na X, říkáme, že dvojice $(X, \|\cdot\|)$ je **normovaný lineární prostor nad** $\mathbb{F}$.

Poznámky: (1) Normovaný lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se nazývá **reálný normovaný lineární prostor**; normovaný lineární prostor nad $\mathbb{C}$ se nazývá **komplexní normovaný lineární prostor**. Říkáme-li pouze **normovaný lineární prostor**, myslíme tím buď reálný nebo komplexní normovaný lineární prostor.
(2) Je-li norma na X dána a nehrozí nedorozumění, říkáme, že X je normovaný lineární prostor.

Větička 1. *Je-li $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor, pak zobrazení $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$ definované předpisem*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X,$$

je metrika na X. Říká se jí **metrika indukovaná normou**.

Poznámky: (1) Každý normovaný lineární prostor je tedy zároveň metrickým prostorem. Proto můžeme mluvit o otevřených a uzavřených množinách, omezených množinách, konvergenci posloupností, spojitosti zobrazení, hustých podmnožinách, separabilitě atp. Všechny tyto pojmy uvažujeme vzhledem k metrice indukované normou.
(2) Každý normovaný lineární prostor je zároveň vektorovým prostorem. Proto můžeme mluvit o podprostorech, konvexních podmnožinách, lineárních zobrazeních atp.

Definice. Normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice indukované normou, se nazývá **Banachův prostor**.

Příklad 2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Prostor $\mathbb{F}^n$ je separabilní Banachův prostor, pokud jej uvažujeme s některou z norem $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, kde*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \text{ pro } p \in [1, \infty),$$
$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Větička 3. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a Y je podprostor X. Pak $(Y, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Je-li X Banachův prostor, pak Y je Banachův prostor (tj. úplný), právě když Y je uzavřený v X.*

Příklady 4.

(1) *Je-li* Γ *libovolná množina, označme*

$$B(\Gamma,\mathbb{F}) = \{f : \Gamma \to \mathbb{F}; f \text{ omezená}\}.$$

Pak $B(\Gamma,\mathbb{F})$ *je vektorový prostor nad* $\mathbb{F}$. *Pokud na něm definujeme normu* $\|\cdot\|_\infty$ *předpisem*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)|; \gamma \in \Gamma\}, \quad f \in B(\Gamma),$$

dostaneme Banachův prostor. Nadále ho budeme značit $\ell^\infty(\Gamma,\mathbb{F})$ *nebo jen* $\ell^\infty(\Gamma)$ *(pokud* $\mathbb{F}$ *je buď dáno nebo není podstatné). Konvergence posloupností v* $\ell^\infty(\Gamma)$ *splývá se stejnoměrnou konvergencí na* Γ.

(2) *Prostor* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ *značíme* ℓ^∞ *a interpretujeme jako prostor omezených posloupností. Prostor* ℓ^∞ *není separabilní*

(3) *Je-li* T *metrický (nebo obecněji topologický) prostor, značíme*

$$\mathcal{C}_b(T,\mathbb{F}) = \{f : T \to \mathbb{F}; f \text{ je spojitá a omezená}\}.$$

Pak $\mathcal{C}_b(T,\mathbb{F})$ *je uzavřený podprostor* $\ell^\infty(\Gamma)$, *je to tedy Banachův prostor. (Často píšeme jen* $\mathcal{C}_b(T)$*.)*

(4) *Je-li* K *kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův kompaktní topologický) prostor, pak každá spojitá funkce na* K *je omezená. Místo* $\mathcal{C}_b(K)$ *píšeme jen* $\mathcal{C}(K)$. *Je-li* K *kompaktní metrický prostor, je prostor* $\mathcal{C}(K)$ *separabilní.*

(5) *Nechť* c_0 *označuje prostor všech (reálných nebo komplexních) posloupností, které mají limitu* 0. *Pak* c_0 *je uzavřený podprostor* ℓ^∞, *je to tedy Banachův prostor. Prostor* c_0 *je separabilní.*

(6) *Je-li* Γ *libovolná množina, označme*

$$c_0(\Gamma,\mathbb{F}) = \{f : \Gamma \to \mathbb{F}; \forall \varepsilon > 0 : \{\gamma \in \Gamma; |f(\gamma)| > \varepsilon\} \text{ je konečná}\}.$$

Pak $c_0(\Gamma,\mathbb{F})$ *je uzavřený podprostor* $\ell^\infty(\Gamma,\mathbb{F})$, *je to tedy Banachův prostor. Často tento prostor budeme značit jen* $c_0(\Gamma)$. *Prostor* $c_0(\mathbb{N})$ *splývá s prostorem* c_0. *Je-li* Γ *nespočetná, je prostor* $c_0(\Gamma)$ *neseparabilní.*

(7) *Nechť*

$$\mathcal{C}^1([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{F}; f' \text{ je spojitá na } [0,1]\},$$

kde f' *označuje derivaci funkce* f *(v krajních bodech jednostrannou). Pak* $\mathcal{C}^1([0,1])$ *je separabilní Banachův prostor, pokud normu definujeme jako*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \max\{|f(x)|; x \in [0,1]\} + \max\{|f'(x)|; x \in [0,1]\}.$$

Větička 5. *Nechť* $(X, \|\cdot\|)$ *je Banachův prostor. Nechť funkce* $\phi : X \to [0,+\infty]$ *splňuje následující vlastnosti:*

(a) ϕ *splňuje axiomy normy (bod (ii) se požaduje jen pro* $\lambda \neq 0$*);*

(b) $\phi(x) \geq \|x\|$ *pro každé* $x \in X$;

(c) ϕ *je zdola polospojitá na* X, *tj.* $\{x \in X; \phi(x) \leq c\}$ *je uzavřená v* X *pro každé* $c \in \mathbb{R}$.

Označme $Y = \{x \in X; \phi(x) < +\infty\}$. *Pak* (Y, ϕ) *je Banachův prostor.*

Příklady 6.

(1) *Nechť* Γ *je libovolná množina a* $p \in [1, \infty)$. *Definujme*

$$\ell^p(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{F}; \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < +\infty\}.$$

Pak $\ell^p(\Gamma)$ *je Banachův prostor, pokud definujeme normu předpisem*

$$\|f\|_p = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p \right)^{1/p}, \quad f \in \ell^p(\Gamma).$$

Místo $\ell^p(\mathbb{N})$ *píšeme jen* ℓ^p. *Prostor* ℓ^p *je separabilní. Je-li* Γ *nespočetná, je* $\ell^p(\Gamma)$ *neseparabilní.*

(2) *Nechť* K *je kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův topologický) prostor. Nechť* $\mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ *značí prostor všech konečných znaménkových regulárních borelovských měr na* K *a* $\mathcal{M}(K, \mathbb{C})$ *prostor všech komplexních regulárních borelovských měr na* K. *V obou případech definujme normu předpisem*

$$\|\mu\| = |\mu|(K) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\mu(B_j)|; B_1, \dots, B_n \subset K \text{ po dvou disjunktní borelovské} \right\}.$$

Pak $\mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ *je reálný Banachův prostor a* $\mathcal{M}(K, \mathbb{C})$ *je komplexní Banachův prostor. Souhrnně značíme* $\mathcal{M}(K, \mathbb{F})$ *nebo jen* $\mathcal{M}(K)$.

Příklad 7. *Nechť* (Ω, Σ, μ) *je prostor s nezápornou mírou. Označme* $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F})$ *vektorový prostor všech* Σ*-měřitelných funkcí na* Ω *s hodnotami v* $\mathbb{F}$. *Na tomto prostoru uvažujme ekvivalenci definovanou rovností* μ*-skoro všude. Nechť* $L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F})$ *značí vektorový prostor všech tříd této ekvivalence. Pro* $[f] \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F})$ *označme*

$$\|[f]\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \quad \text{pro } p \in [1, \infty),$$
$$\|[f]\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| = \inf\{c > 0; |f| \le c \ \mu\text{-skoro všude}\}.$$

Pak pro každé $p \in [1, \infty]$ *je prostor*

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F}) = \{[f] \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F}); \|[f]\|_p < \infty\}$$

Banachův prostor, je-li opatřen normou $\|\cdot\|_p$.
Nevede-li to k nedorozumění, píšeme jen $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, *případně* $L^p(\mu)$ *nebo* $L^p(\Omega)$. *Rovněž obvykle píšeme* f *místo* $[f]$.
Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *borelovská množina, pak prostorem* $L^p(\Omega)$ *rozumíme prostor* $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, *kde* Σ *je* σ*-algebra borelovských podmnožin* Ω *a* μ *je zúžení* n*-rozměrné Lebesgueovy míry na* Σ. *Tento prostor je separabilní.*

Větička 8 (spojitost operací). *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Pak*

$$x \mapsto \|x\|; \quad (x,y) \mapsto x+y; \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

jsou spojitá zobrazení (po řadě $X \to \mathbb{R}$, $X \times X \to X$, $\mathbb{F} \times X \to X$).

Značení: Nechť X je normovaný lineární prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Pak značíme

- $B(x,r) = \{y \in X; \|y - x\| \leq r\}$ (**uzavřená koule o středu** x **a poloměru** r)
- $U(x,r) = \{y \in X; \|y - x\| < r\}$ (**otevřená koule o středu** x **a poloměru** r)
- $B_X = B(\boldsymbol{o}, r) = \{y \in X; \|y\| \leq 1\}$ (**uzavřená jednotková koule**)
- $U_X = U(\boldsymbol{o}, r) = \{y \in X; \|y\| < 1\}$ (**otevřená jednotková koule**)
- $S_X = \{y \in X; \|y\| = 1\}$ (**jednotková sféra**)

Poznámka:

- $B(x,r)$ (a tedy i B_X) je uzavřená konvexní množina.
- $U(x,r)$ (a tedy i U_X) je otevřená konvexní množina.
- S_X je uzavřená množina.

Tvrzení 9 (charakterizace ekvivalentních norem). *Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou dvě normy na X. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní*

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ určují stejné otevřené množiny. (Tj. identické zobrazení na X je homeomorfismus $(X, \|\cdot\|_1)$ na $(X, \|\cdot\|_2)$.)*

(ii) *Existují konstanty $c, d > 0$, že pro všechna $x \in X$ platí*

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq d\|x\|_1 .$$

(iii) *Existují konstanty $c, d > 0$, že pro všechna $x \in X$ platí*

$$c \cdot B_{(X, \|\cdot\|_2)} \subset B_{(X, \|\cdot\|_1)} \subset d \cdot B_{(X, \|\cdot\|_2)}.$$

Definice. Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na vektorovém prostoru X se nazývají **ekvivalentní**, jestliže splňují některou z (ekvivalentních) podmínek v Tvrzení 10.

Příklad 10. *Pro každé $x \in \mathbb{F}^n$ a každé $p \in [1, \infty)$ platí*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty ,$$

tedy všechny normy $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, jsou na $\mathbb{F}^n$ navzájem ekvivalentní.