II.3 Vnoření do druhého duálu a reflexivita

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. Jeho **druhým duálem** rozumíme duální prostor k X^*, tj. prostor $(X^*)^*$. Značíme ho X^{**}.

Věta 16 (vnoření do druhého duálu). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ definujme zobrazení $\varkappa(x) : X^* \to \mathbb{F}$ vzorcem*

$$\varkappa(x)(x^*) = x^*(x), \quad x^* \in X^*.$$

Pak zobrazení $\varkappa : x \mapsto \varkappa(x)$ je lineární izometrie X do X^{**}.

Poznámka: Zobrazení $\varkappa$ z předchozí věty se nazývá **kanonické vnoření prostoru X do druhého duálu**. Je-li třeba zdůraznit, že se týká prostoru X, značíme ho $\varkappa_X$.

Poznámka: Protože X^{**} je vždy úplný, je $\overline{\varkappa(X)}$ zúplněním X, což umožňuje dokázat Větu I.17.

Definice. Normovaný lineární prostor X se nazývá **reflexivní**, pokud $\varkappa(X) = X^{**}$.

Poznámky:

- Reflexivní prostor je nutně úplný.
- Existuje Banachův prostor J, který není reflexivní, ale přitom je izometrický J^{**} (Jamesův prostor zmíněný v oddílu I.7).

Věta 17 (vlastnosti reflexivních prostorů). *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) *X je reflexivní, právě když X^* je reflexivní.*
(b) *Je-li X reflexivní, pak každý jeho uzavřený podprostor i každý kvocient je reflexivní.*
(c) *Je-li X reflexivní a Y je izomorfní X, pak X je také reflexivní.*

Větička 18 (nabývání normy). *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak pro každé $f \in X^*$ existuje $x \in X$ takové, že $\|x\| = 1$ a $f(x) = \|f\|$.*

Poznámky:

- Pokud pro $f \in X^*$ existuje $x \in X$ takové, že $\|x\| = 1$ a $f(x) = \|f\|$, říkáme, že f **nabývá své normy**.
- Z Větičky 18 snadno plyne, že prostory c_0, ℓ^1 a $\mathcal{C}([0,1])$ nejsou reflexivní.
- Větička 18 tedy říká, že na reflexivním Banachově prostoru každý spojitý lineární funkcionál nabývá své normy. Platí i netriviální obrácení (Jamesova věta z roku 1963): Pokud X je Banachův prostor a každý prvek X^* nabývá své normy, pak X je reflexivní.
- Jiná netriviální věta (Bishop-Phelpsova věta z roku 1961) říká, že množina všech funkcionálů nabývajících své normy je vždy hustá v X^*.