Důkaz Věty II.25. (Rieszova věta o reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)
$\varphi: C(K,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ nezáporný lineární funkcionál

<u>1. krok</u> φ je spojitý a $\|\varphi\| = \varphi(1)$.

Γ $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ... $f \in C(K,\mathbb{R}) \Rightarrow \forall x \in K: -\|f\|_\infty \le f(x) \le \|f\|_\infty$

φ nezáporný $\Rightarrow$ $\varphi(-\|f\|_\infty) \le \varphi(f) \le \varphi(\|f\|_\infty)$

$$\varphi(-\|f\|_\infty) = -\|f\|_\infty \varphi(1), \qquad \varphi(\|f\|_\infty) = \varphi(1)\cdot\|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow |\varphi(f)| \le \|f\|_\infty \cdot \varphi(1)$$

Tedy $\|\varphi\| \le \varphi(1)$

$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ... $f \in C(K,\mathbb{R})$ $\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1,\ |\varphi(f)| = \alpha \cdot \varphi(f)$

Jest: $|\varphi(f)| = \alpha\varphi(f) = \varphi(\alpha f) = \varphi(\operatorname{Re}\alpha f + i \operatorname{Im}\alpha f)$
$= \varphi(\operatorname{Re}\alpha f) + i\,\varphi(\operatorname{Im}\alpha f) = \varphi(\operatorname{Re}\alpha f)$
$\le \|\operatorname{Re}\alpha f\|_\infty \cdot \varphi(1) \le \|\alpha f\|_\infty \cdot \varphi(1) = \|f\|_\infty \cdot \varphi(1)$

(použili jsme: φ nezáporný $\Rightarrow \varphi(C(K,\mathbb{R})) \subset C(K,\mathbb{R})$ a případ $\mathbb{F} = \mathbb{R}$)
Opět tedy $\|\varphi\| \le \varphi(1)$

Rovnost plyne z toho, že $\|1\|_\infty = 1$ $\lrcorner$

<u>2. krok</u> Pro $U \subset K$ otevřenou položme $\mu(U) = \sup\{\varphi(f) : f: K \to [0,1]$ spoj. $\operatorname{spt} f \subset U\}$

<u>Pak platí:</u> (i) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(K) = \varphi(1) < \infty$
(ii) $U \subset V \Rightarrow \mu(U) \le \mu(V)$.
(iii) $U \cap V = \emptyset \Rightarrow \mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V)$
(iv) (U_n) posloupnost otevřených množin $\Rightarrow \mu(\bigcup_n U_n) \le \sum_n \mu(U_n)$

Γ (i) a (ii) je jasné

(iii) $f: K \to [0,1]$ spojitá, $\operatorname{spt} f \subset U \cup V$ $\Rightarrow f_1 := f\cdot\chi_U$, $f_2 := f \cdot \chi_V$
jsou spojité $\varphi(f) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2) \le \mu(U) + \mu(V)$
odtud $\mu(U \cup V) \le \mu(U) + \mu(V)$
$\ge$: $\varepsilon > 0$ ... ex. $f_1, f_2: K \to [0,1]$ spoj., $\operatorname{spt} f_1 \subset U$, $\operatorname{spt} f_2 \subset V$
$\varphi(f_1) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\varphi(f_2) > \mu(V) - \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow \varphi(f_1 + f_2) > \mu(U) + \mu(V) - \varepsilon$, $\operatorname{spt}(f_1+f_2) \subset U \cup V$, má hodnoty v $[0,1]$
$\Rightarrow \mu(U \cup V) > \mu(U) + \mu(V) - \varepsilon$.

(iv) $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. nechť $f: K \to [0,1]$ je spojitá, $\operatorname{spt} f \subset U$.

spt f kompaktní $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \operatorname{spt} f \subset U_1 \cup \dots \cup U_N$.

Dle lemmatu 26(c) ex. $h, f_1, \dots, f_N : K \to [0,1]$ spojité,

že $\operatorname{spt} h \subset K \setminus \operatorname{spt} f$

$\operatorname{spt} f_j \subset U_j \quad j = 1, \dots, N$

a $h + \sum_{j=1}^{N} f_j = 1$ na K

Tedy $\sum_{j=1}^{N} f_j = 1$ na spt f, tedy $f = \sum_{j=1}^{N} f_j f$

$\Rightarrow \varphi(f) = \sum_{j=1}^{N} \varphi(f_j f) \le \sum_{j=1}^{N} \mu(U_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$

Přechodem k supremu: $\mu(U) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$ ⌋

3. krok Pro $A \subset K$ libovolnou položme

$$\mu^*(A) = \inf \{ \mu(U) : U \supset A, U \text{ otevřená} \}$$

Pozorování: (v) $\mu^*(\emptyset) = 0$, $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$

(vi) $\mu^*(U) = \mu(U)$ pro U otevřenou

(vii) (A_n) posl. podmnožin $K \Rightarrow \mu^*(\bigcup_n A_n) \le \sum \mu^*(A_n)$

[(v) a (vi) jasné z (i) a (ii).

(vii) $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ ex. $U_n \supset A_n$ otevřená, $\mu(U_n) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$U := \bigcup_n U_n$. pak U je otevřená, $U \supset \bigcup_n A_n$

a $\mu(U) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \right) + \varepsilon$

dle (iv)

Tedy $\mu^*(A) \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \right) + \varepsilon$

protože $\varepsilon > 0$ je libovolné, je důkaz hotov ⌋

4. krok $A \subset K$ libovolná, $U \subset K$ otevřená $\Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U)$

Γ $\leq$ plyne z (vii), stačí tedy dokázat $\geq$:

$\varepsilon > 0$ libovolné $\Rightarrow \exists V \supset A$ otevřená, že $\mu(V) < \mu^*(A) + \varepsilon$

Dále zvolme $f: K \to [0,1]$ spoj., spt $f \subset U \cap V$, že $\varphi(f) > \mu(U \cap V) - \varepsilon$

a dle lem. 26(a) najdeme W otevřenou, že spt $f \subset W \subset \overline{W} \subset U \cap V$

Pak $\mu(W) \geq \varphi(f) > \mu(U \cap V) - \varepsilon$

Dále $V \setminus \overline{W} \supset A \setminus U$, tedy $\mu^*(A \setminus U) \leq \mu(V \setminus \overline{W})$

↑ otevřená množina

Tedy: $\mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) \leq \mu(U \cap V) + \mu(V \setminus \overline{W}) <$

$< \varphi(f) + \varepsilon + \mu(V \setminus \overline{W}) \leq \mu(W) + \varepsilon + \mu(V \setminus \overline{W})$

$\overset{(iii)}{=} \mu(W \cup (V \setminus \overline{W})) + \varepsilon \overset{(ii)}{\leq} \mu(V) + \varepsilon < \mu^*(A) + 2\varepsilon$

ε libovolné $\Rightarrow \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) \leq \mu^*(A)$, a je to. $\lrcorner$

5. krok Dle kroku 3 je μ^* vnější míra. Dle kroku 4 jsou otevřené množiny měřitelné v Carathéodoryově smyslu. Protože σ-algebra generovaná otevřenými množinami je borelovská σ-algebra, z Carathéodoryho věty plyne, že μ^* zúžená na borelovské množiny je σ-aditivní míra. Protože μ^* je konečná, z definice μ^* a (vi) plyne, že taková míra je regulární. Označme ji μ.

Zbývá ukázat, že $\varphi(f) = \int_K f \, d\mu$, $f \in C(K, \mathbb{F})$

stačí to dokázat pro $f \in C(K, \mathbb{R})$ ($f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$)

Navíc stačí $\forall f \in C(K, \mathbb{R})$ platí $\varphi(f) \leq \int_K f \, d\mu$

(aplikací na f a $-f$ dostaneme rovnost)

protože $\varphi(1) = \mu(K) = \int_K 1 \, d\mu$ a každá $f \in C(K, \mathbb{R})$ je omezená,

stačí nerovnost dokázat pro $f \geq 0$

6. krok: Stąd wyst. dowieść $\forall f: K \to [0,1]$ ciągłej
$$\varphi(f) \le \int_K f \, d\mu$$

Oznaczmy $E_i = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)\right)$, $i = 1, \dots, n+1$

$\Rightarrow E_i$ borelowskie, rozłączne, pokrywają K

Wybierzmy $U_i \supset E_i$ otwarte, że $\mu(U_i) < \mu(E_i) + \frac{1}{n^2}$

a ponadto $U_i \subset f^{-1}\left(\left[0, \frac{i}{n}\right)\right)$

$\left[E_i \subset f^{-1}\left(\left[0, \frac{i}{n}\right)\right), \ f^{-1}\left(\left[0, \frac{i}{n}\right)\right) \text{ otwarte}, \right.$

$\left. \text{także zewnętrzna regularność } \mu \right]$

Zatem $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1} = K \Rightarrow$ dla Lematu 2.6 (c) ex.

$g_1, \dots, g_{n+1}: K \to [0,1]$ ciągłe, $\operatorname{supp} g_j \subset U_j$, $\sum g_j = 1$ na K

Zatem
$$\varphi(f) = \sum_{j=1}^{n+1} \varphi(g_j f) \le \sum_{j=1}^{n+1} \varphi\left(g_j \cdot \frac{j}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{n} \varphi(g_j)$$

φ nieujemny
$f \le \frac{j}{n}$ na U_j

$$\le \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{n} \mu(U_j) \le \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{n}\left(\mu(E_j) + \frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j-1}{n} \mu(E_j) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n} \mu(E_j) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{n^3}$$
$$\le \int_K f \, d\mu + \underbrace{\frac{1}{n}\mu(K) + \frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{n^3}}_{\to 0 \text{ przy } n \to \infty}$$

$$\Rightarrow \varphi(f) \le \int_K f \, d\mu$$

7. krok Jednoznačnost μ:

Nechť ν je jiná míra, která splňuje totéž:

U otevřená, $f : K \to [0,1]$ spojitá, $\operatorname{spt} f \subset U$

$$\Rightarrow \varphi(f) = \int_K f \, d\nu \leq \int_K \chi_U \, d\nu = \nu(U)$$

Tedy $\mu(U) \leq \nu(U)$

Obráceně: U otevřená, $\varepsilon > 0$. Z regularity ν exis. $F \subset U$ uzavřená v K, $\nu(F) > \nu(U) - \varepsilon$

Dle Lemmatu 26 (5) ex. $f : K \to [0,1]$ spojitá, $f|F = 1$, $\operatorname{spt} f \subset U$

Pak $$\mu(U) \geq \varphi(f) = \int_K f \, d\nu \geq \nu(F) > \nu(U) - \varepsilon$$

Tedy $\mu = \nu$ na otevřených množinách. Z regularity plyne, že $\mu = \nu$ na borelovských množinách.