Důležitost předpokladů ve větě o otevřeném zobrazení

X, Y NLP, $T: X \to Y$ spojité lineární zobrazení, které je na

(1) Věta o otevřeném zobrazení říká:

X, Y úplné $\Rightarrow$ T otevřené.

(2) X úplný $\not\Rightarrow$ T otevřené

Nechť $X = \ell^2$, $T: X \to X$ je definováno $T((x_n)) = \left(\frac{x_n}{n}\right)$
a $Y = T(X)$

Pak $Y \subset\subset \ell^2$, Y hustý (obsahuje všechny prvky, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic)
$Y \neq \ell^2$ (např. $\left(\frac{1}{n}\right) \in \ell^2 \setminus Y$)

Tedy Y není úplný.
T jakožto operátor X na Y není otevřený, protože T^{-1} není spojitý

[první možnost: X úplný, Y neúplný $\Rightarrow$ T není izomorfismus,
tedy T^{-1} není spojitý, přitom T je spojitý, $\|T\| = 1$

druhá možnost: e_n .. kanonický vektor, $\|e_n\| = 1$
$T^{-1}(e_n) = n e_n$ $\Rightarrow \|T^{-1}(e_n)\| = n$
$\Rightarrow T^{-1}$ není spojitý]

(3) Y úplný $\not\Rightarrow$ T otevřený:

Nechť Y je nekonečně-dimenzionální Banachův prostor
(např. $Y = \ell^2$)
Nechť $f: Y \to \mathbb{F}$ je nespojitý lineární funkcionál (Tvrzení I.46)
Pro $x \in Y$ definujme $|||x||| = \|x\| + |f(x)|$.
Pak $|||\cdot|||$ je norma na Y. Nechť $X = (Y, |||\cdot|||)$
$T: X \to Y$ buď identita.

Pak T je spojitý lineární operátor, $\|T\| \leq 1$, T zobrazuje X na Y

T není otevřené, protože T^{-1} není spojité

[kdyby T^{-1} byl spojitý, existuje $\|T^{-1}\| < \infty$

$\Rightarrow \forall x \in X: \quad |||x||| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|x\|$

$\Rightarrow \|x\| + |f(x)| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|x\|$

$|f(x)| \leq (\|T^{-1}\| - 1) \cdot \|x\|$

$\Rightarrow \|f\| \leq \|T^{-1}\| - 1 \quad \Rightarrow f$ spojitý .. spor]

(4) $\dim Y < \infty \Rightarrow T$ otevřené

všechny normy na Y jsou ekvivalentní $\Rightarrow$ BÚNO $Y = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_1)$

$e_1, \dots, e_n$ buď kanonická báze

nechť $x_1, \dots, x_n \in X$, $T(x_j) = e_j$

nechť $r := \max\{\|x_1\|, \dots \|x_n\|\}$

$\Rightarrow \frac{x_j}{r} \in B_X, \quad T(\frac{x_j}{r}) = \frac{e_j}{r}$

$\Rightarrow T(B_X) \supset \{\frac{e_1}{r}, \dots, \frac{e_n}{r}\}$

odsud plyne, že $T(B_X) \supset \frac{1}{r} B_Y$, tedy T je otevřené

$(y_1, \dots, y_n) \in \frac{1}{r} B_Y$

$x := \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot x_j \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j| \cdot \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j| \cdot r \leq 1$

$T(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j T(x_j) = (y_1, \dots, y_n)$