III. Omezené lineární operátory

III.1 Důsledky Baireovy věty

Tvrzení 1 (princip stejnoměrné omezenosti). *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $A \subset L(X,Y)$ je nějaká podmnožina. Pokud je množina*

$$\{x \in X;\ \{Tx; T \in A\} \text{ je omezená v } Y\}$$

druhé kategorie v prostoru X, pak je množina A omezená v $L(X,Y)$.

Důsledek 2. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $A \subset L(X,Y)$. Pak následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *Množina A je omezená v $L(X,Y)$.*
(ii) *Pro každé $x \in X$ je množina $\{Tx; T \in A\}$ omezená v Y.*

Důsledek 3 (omezenost a slabá omezenost). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Pak následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *Množina A je omezená v X.*
(ii) *Každé $f \in X^*$ je omezené na množině A.*

Věta 4 (Banach-Steinhaus). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a (T_n) je posloupnost v $L(X,Y)$. Předpokládejme, že pro každé $x \in X$ existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ v Y. Pak zobrazení $T : X \to Y$ definované vzorcem*

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \quad x \in X,$$

patří to $L(X,Y)$ (tj. je to spojité lineární zobrazení).

Věta 5 (Banachova věta o otevřeném zobrazení). *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Poznámky:

- Zobrazení mezi metrickými prostory je **otevřené**, pokud obraz každé otevřené množiny je otevřená množina. Stejná definice je použitelná i pro zobrazení mezi topologickými prostory.
- V předchozí větě je podstatný předpoklad úplnosti obou prostorů – X i Y.

Lemma 6. *Nechť X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor, $T \in L(X,Y)$ a $r, s > 0$. Pokud $U(\boldsymbol{o}, s) \subset \overline{T(U(\boldsymbol{o}, r))}$, pak $U(\boldsymbol{o}, s) \subset T(U(\boldsymbol{o}, r))$.*

Důsledek 7. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je prosté a na. Pak T^{-1} je spojité, tj. T je izomorfismus X na Y.*

Důsledek 8. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je na. Nechť $\widetilde{T} : X/\ker T \to Y$ je zobrazení popsané v Tvrzení II.12. Pak $\widetilde{T}$ je izomorfismus $X/\ker T$ na Y.*

Lemma 9 (součin normovaných lineárních prostorů). *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory. Na vektorovém prostoru $X \times Y$ definujme pro $p \in [1,\infty]$ normu $\|\cdot\|_p$ vzorcem*

$$\|(x,y)\|_p = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, \quad (x,y) \in X \times Y \text{ pro } p \in [1,\infty),$$
$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad (x,y) \in X \times Y.$$

Pak platí:

(a) *Pro každé $p \in [1,\infty]$ je $\|\cdot\|_p$ norma na $X \times Y$ a všechny tyto normy jsou ekvivalentní.*
(d) *Posloupnost $((x_n, y_n))$ konverguje v prostoru $X \times Y$ k bodu (x,y), právě když $x_n \to x$ v X a $y_n \to y$ v Y.*
(c) *Jsou-li X a Y úplné, je i $X \times Y$ úplný (s kteroukoli z norem $\|\cdot\|_p$).*

Věta 10 (věta o uzavřeném grafu). *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení, jehož graf je uzavřený v $X \times Y$. Pak T je spojité, tj. $T \in L(X,Y)$.*

Poznámky:

- **Grafem** zobrazení T rozumíme množinu

$$\{(x,y) \in X \times Y; y = Tx\}.$$

- $X \times Y$ uvažujeme s některou z norem popsaných v Lemmatu 9.
- Uzavřenost grafu zobrazení T je ekvivalentní podmínce

$$(x_n) \subset X, x_n \to x \in X, Tx_n \to y \in Y \Rightarrow y = Tx.$$

Poznámka: Je-li $T : X \to Y$ lineární zobrazení, je graf T lineární podprostor $X \times Y$. Je-li $T \in L(X,Y)$, je graf T uzavřeným podprostorem $X \times Y$. Věta 10 tedy říká, že za předpokladu úplnosti X a Y platí i opačná implikace. Je-li $T \in L(X,Y)$, je graf T izomorfní prostoru X.