

Dodatky z Vete III. 19

$X, Y$  NCP,  $T: X \rightarrow Y$  spojité lineární operátor

•  $R(T') \subset (\text{Ker}(T))^\perp$

$\forall x^* \in R(T'), x \in \text{Ker} T$

$\Rightarrow \exists y^* \in Y^* : x^* = T' y^*$

Pak  $x^*(x) = (T' y^*)(x) = y^*(Tx) = y^*(0) = 0$

tedy  $x^* \in (\text{Ker}(T))^\perp$

• Tedy:  $\overline{R(T')} \subset (\text{Ker}(T))^\perp$

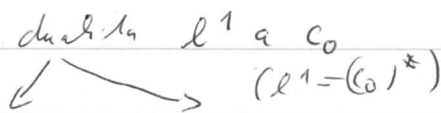
• Obecně  $\overline{R(T')} \subsetneq (\text{Ker}(T))^\perp$

Příklad:  $X = l_1, Y = c_0, T: X \rightarrow Y$  je "identita"

Pak  $\text{Ker} T = \{0\}$ , tedy  $(\text{Ker} T)^\perp = X^*$

Přitom  $X^* \cong l^\infty, Y^* \cong l^1$  (dle odh. II. 4)

Přítoto reprezentaci:



$(x_n) \in l^1, (y_n) \in c_0$   
 $(T'(x_n))(y_n) = \sum (x_n)(T(y_n)) = \sum (x_n)(y_n) =$   
 $= \sum x_n y_n = (x_n)(y_n)$

$\nearrow$   
 dualita  $l^\infty = (l^1)^*$

Tedy  $T'(x_n) = (x_n)$ , tj.  $T'$  je "identita"

$\Rightarrow R(T') = l^1 \subset l^\infty$ , to není celé, protože uzavřený je pouze  $c_0$

Co opravdi platí:  $(\text{Ker } T)^\perp = \overline{\text{R}(T')}^{w^*}$

( $w^*$  = topologie bodové konvergence na  $X$ )  
 (na  $X^*$ ) Bor

To bude ve FA 1

( $\supset$ ):  $(\text{Ker } T)^\perp \neq \emptyset$   $w^*$ -uzavřeno +  $\text{R}(T) \subset (\text{Ker } T)^\perp$

$\subset$ :  $x^* \notin \overline{\text{R}(T')}^{w^*} \Rightarrow$  all H-Bovy pro  $w^*$ -topologii

existuje  $x \in X$ , že  $x^*(x) \neq 0$  a  $\forall z^* \in \text{R}(T') : z^*(x) = 0$

$\Downarrow$   
 $\forall y^* \in Y^* : T'y^*(x) = 0$   
 $y^*(Tx) = 0$

$\Downarrow$   
 $Tx = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } T$