Dodatky k Větě III.19

X, Y NLP, $T: X \to Y$ spojitý lineární operátor

- $R(T') \subset (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$

$\ulcorner x^* \in R(T')$, $x \in \mathrm{Ker}\, T$

$\Rightarrow$ ex. $y^* \in Y^*$: $x^* = T'y^*$

Pak $x^*(x) = (T'y^*)(x) = y^*(Tx) = y^*(0) = 0$

tedy $x^* \in (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ $\lrcorner$

- Tedy: $\overline{R(T')} \subset (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$

- Obecně $\overline{R(T')} \subsetneq (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$

Příklad: $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T: X \to Y$ je „identita"

Pak $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$, tedy $(\mathrm{Ker}\, T)^{\perp} = X^*$

Přitom $X^* \simeq \ell^{\infty}$, $Y^* \simeq \ell^1$ (dle oddílu II.5)

Při této reprezentaci: (dualita ℓ^1 a c_0 $(\ell^1 = (c_0)^*)$)

$(x_n) \in \ell^1$, $(y_n) \in \ell_1$

$$(T'((x_n))((y_n)) = (x_n)(T(y_n)) = (x_n)((y_n)) =$$

$$= \sum x_n y_n = (x_n)((y_n))$$

dualita $\ell^{\infty} = (\ell^1)^*$

Tedy $T'((x_n)) = (x_n)$, tj. T' je „identita".

$\Rightarrow R(T') = \ell^1 \subset\subset \ell^{\infty}$, to není hustý, protože uzávěr je roven c_0

Co opravdu platí: $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \overline{R(T')}^{w^*}$

(w^* = topologie bodové konvergence na X (na X^*))

BÚNO

To bude ve FA 1

($\supset$: $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ je w^*-uzavřený + $R(T') \subset (\operatorname{Ker}(T))^{\perp}$

$\subset$: $x^* \notin \overline{R(T')}^{w^*} \Rightarrow$ dle H-B věty pro w^*-topologii

existuje $x \in X$, že $x^*(x) \neq 0$ a $\underbrace{\forall z^* \in R(T'): z^*(x) = 0}$

$\Downarrow$

$\forall y^* \in Y^*: T'y^*(x) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad y^*(Tx) = 0$

$\Downarrow$

$Tx = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} T$)