X, Y NLP, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

T je izomorfismus X do Y $\iff$ $T' : Y^* \to X^*$ je na.

<u>Dk:</u> „$\Rightarrow$" T buď izomorfismus X do Y. Označme $X_1 := T(X)$

Pak X je izomorfní X_1

$$x^* \in X^* \Rightarrow x^* \circ T^{-1} \in X_1^* \overset{H-B}{\Rightarrow} \exists y^* \in Y^* : y^*|_{X_1} = x^* \circ T^{-1}$$

Pak $T' y^* = x^*$

$\left(\text{pro } x \in X : \quad T' y^* (x) = y^*(Tx) = x^*(x) \right)$

$\Rightarrow T'$ je na.

„$\Leftarrow$" • T' je na $\Rightarrow \ker(T) = \left(R(T')\right)_\perp = \left(X^*\right)_\perp = \{0\} \Rightarrow T$ je prostý

• X^*, Y^* úplné, T' na $\Rightarrow T'$ je otevřené zobrazení

$\Rightarrow \exists c > 0 \quad T'(U_{Y^*}) \supset c \cdot U_{X^*}$

$x \in X$, $\|x\| = 1 \Rightarrow \exists x^* \in S_{X^*}$, $x^*(x) = 1$

$\exists y^* \in U_{Y^*} : \quad T'(y^*) = \frac{c}{2} \cdot x^*$

$$y^*(Tx) = T'(y^*)(x) = \frac{c}{2} x^*(x) = \frac{c}{2}$$

$\Rightarrow \|Tx\| \geq \frac{c}{2}$, (pro libovolné $x \in S_X$)

Tedy: $\|Tx\| \geq \frac{c}{2} \|x\|$, $x \in X$ $\Rightarrow T$ je izomorfismus X do Y.

X, Y Banachovy prostory, $T \in L(X,Y)$

T je na $\iff$ T' je izomorfismus Y^* do X^*

Dk: „$\Rightarrow$" T na, X, Y úplné $\Rightarrow$ T otevřené zobrazení

$\Rightarrow$ ex. $c > 0$ $T(U_X) \supset c\,U_Y$

$$y^* \in Y^* \Rightarrow \|T'y^*\| = \sup\{|T'y^*(x)| : x \in U_X\}$$
$$= \sup\{|y^*(Tx)| : x \in U_X\}$$
$$\geq \sup\{|y^*(y)| : y \in c\,U_Y\} = c\|y^*\|$$

Tedy T' je izomorfismus do.

„$\Leftarrow$" T' izomorfismus do

$\Rightarrow \exists\, c > 0 : \|T'y^*\| \geq c\|y^*\|$ pro $y^* \in Y^*$

Jako výše: $\sup\{|y^*(Tx)| ; x \in U_X\} \geq c\|y^*\|$

z „geometrické H-B věty" se dostane
$$\overline{T(U_X)} \supset c\,U_Y,$$

tedy dle Lemmatu III.6 $T(U_X) \supset c\,U_Y$,

tedy T je na.