3. Fredholmova věta: X Banachův, $T \in K(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Pak: $\dim X/R(\lambda I - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T') = \dim X^*/R(\lambda I - T') = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$

a toto číslo je konečné.

Dk: $S := \lambda I - T$. Pak $S' = \lambda I - T'$

1. krok: z Věty 30 (c) víme, že $\dim \operatorname{Ker}(S) < \infty$, $R(S)$ uzavřený a také $\dim \operatorname{Ker}(S') < \infty$, $R(S')$ uzavřený. Tedy koeficienty mají smysl a dokázat stačí rovnost.

2. krok: Ukažme, že $\dim \operatorname{Ker}(S) \le \dim X/R(S)$

Sporem. Nechť $\dim X/R(S) < \dim \operatorname{Ker}(S)$. Pak spec. $\dim X/R(S) < \infty$.

Dle T III.13 a III.14 jsou $\operatorname{Ker}(S)$ i $R(S)$ komplementované; mají tedy topologické doplňky:

$$X = \operatorname{Ker} S \oplus_t E = R(S) \oplus F$$

$\dim F = \dim X/R(S) < \dim \operatorname{Ker} S \implies$ ex. $A : \operatorname{Ker} S \to F$ lineární, na, ne prosté

Pak A je spojitý ($\dim \operatorname{Ker} S < \infty$)

P buď projekce X na $\operatorname{Ker} S$ podél E

$U := T - AP$. Pak $U \in K(X)$ ($T \in K(X)$, $AP \in F(X) \subset K(X)$)

$$\lambda I - U = \lambda I - T + AP = S + AP$$

tento operátor je na: $x \in X \implies x = y + z$, $y \in R(S)$, $z \in F$

ex. $v \in \operatorname{Ker}(S)$, že $Av = z$, ex. $u \in X$ $Su = y$

Pak $(\lambda I - U)(u - Pu + \cancel{A}v) = (S + AP)(u - Pu + \cancel{A}v) =$

$= Su + Av = y + z = x$

Tedy $\lambda I - U$ je opravdu na, z Věty 31 pak plyne, že $\lambda I - U$ je prosté.

To ovšem není pravda, protože $(\lambda I - U)\restriction_{\operatorname{Ker} S} = A$, které není prosté.

3. krok

Víme teď, že $\dim \operatorname{Ker}(S) \le \dim X/R(S)$

aplikací na S': $\dim(\operatorname{Ker}(S')) \le \dim X^*/R(S')$

Dále, z věty II.14 plyne:

$$\left(X/R(S)\right)^* \overset{\text{II.14}}{\simeq} R(S)^{\perp} \overset{\text{III.33}}{=} \operatorname{Ker}(S')$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(S') = \dim \left(X/R(S)\right)^* = \dim X/R(S)$$

$$(\operatorname{Ker} S)^* \overset{\text{II.14}}{\simeq} X^*/(\operatorname{Ker} S)^{\perp} \overset{\text{III.33}}{=} X^*/R(S')$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} S = \dim (\operatorname{Ker} S)^* = \dim X^*/R(S')$$

Závěr:

$$\dim \operatorname{Ker}(S) = \dim X^*/R(S') \ge \dim \operatorname{Ker}(S') = \dim X/R(S) \ge$$

$$\ge \dim \operatorname{Ker}(S)$$

$\Rightarrow$ platí rovnost.