Lemma 6 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená

- μ konečná regulární borelovská míra na Ω (znaménková; komplexní)

Nechť $\mu \neq 0$. Pak existuje $B \subset \Omega$ borelovská, $\mu(B) \neq 0$

Zvolme $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{3}|\mu(B)|$. Z regularity μ plyne, že existují $K \subset B$ kompaktní a $U \supset B$ otevřená, $U \subset \Omega$, že $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$. Dle T2(5) existuje $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ na K. Pak

$$\left|\int_\Omega \varphi\, d\mu\right| = \left|\int_U \varphi\, d\mu\right| = \left|\int_{U\setminus K} \varphi\, d\mu + \int_K \varphi\, d\mu\right| \ge$$

$$\ge \left|\int_K \varphi\, d\mu\right| - \left|\int_{U\setminus K} \varphi\, d\mu\right| \ge |\mu(K)| - \int_{U\setminus K} |\varphi|\, d|\mu| \ge$$

$$\ge |\mu(K)| - \varepsilon \ge |\mu(B)| - |\mu(B\setminus K)| - \varepsilon \ge |\mu(B)| - |\mu|(B\setminus K) - \varepsilon$$

$$> |\mu(B)| - 2\varepsilon > 0$$

- $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, f není s.v. nulová.

Pak ex. $a \in \Omega$, $r > 0$, že $B(a,r) \subset \Omega$, f není s.v. nulová na $U(a,r)$

Protože $B(a,r)$ je kompaktní, je f integrovatelná na $B(a,r)$

Definujme míru μ předpisem $\mu(A) = \int_A f\, d\lambda^d$, $A \subset U(a,r)$ borelovská.

Pak $\mu \neq 0$, je to konečná regulární borel. míra na $U(a,r)$,

tedy dle prvního bodu ex. $\varphi \in \mathcal{D}(U(a,r))$, že $\int_{U(a,r)} \varphi\, d\mu \neq 0$

Pak $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f\varphi\, d\lambda^d = \int_{U(a,r)} f\varphi\, d\lambda^d = \int_{U(a,r)} f\, d\mu \neq 0.$$