Tvrzení IV.7 $\quad f \in L^1_{loc}((a,b))$, $\int_a^b f\varphi' = 0$ pro $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$

$\Rightarrow$ f konstantní $[\exists\, c \in \mathbb{F} : f = c$ s.v.$]$

Pozn: Plyne to z T 11 a L6.

Přímý důkaz: zvolme $\varphi_0 \in \mathcal{D}((a,b))$, $\int_a^b \varphi_0 = 1$

a položme $c := \int_a^b f \cdot \varphi_0$

Ukážeme, že $f = c$ s.v.

$\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ libovolná $\Rightarrow$ definujme $\psi = \varphi - \varphi_0 \cdot \int_a^b \varphi$

Pak $\psi \in \mathcal{D}((a,b))$, $\int_a^b \psi = 0$. Tedy $\eta(t) = \int_a^t \psi \in \mathcal{D}((a,b))$,

$\eta' = \psi$

$\Rightarrow \int_a^b f\psi = \int_a^b f\eta' = 0$

$\Rightarrow$ dostaneme: $\int_a^b f\varphi = \int_a^b \varphi \cdot \int_a^b f\varphi_0 = c \cdot \int_a^b \varphi$

$\Rightarrow \int_a^b (f-c)\varphi = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$

Tedy $f - c = 0$ s.v. dle Lemmatu 6