IV. Teorie distribucí a Fourierova transformace

Úmluva: V této kapitole budeme symbolem $\|\boldsymbol{x}\|$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ označovat euklidovskou normu prvku $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

IV.1 Prostor testovacích funkcí a slabé derivace

Definice. Nechť $d \in \mathbb{N}$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.

(a) Je-li $f : \Omega \to \mathbb{F}$ spojitá, pak jejím **nosičem** rozumíme množinu
$$\operatorname{spt} f = \overline{\{\boldsymbol{x} \in \Omega; f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}},$$
kde uzávěr se bere v Ω.

(b) Označme
$$\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{F}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{F}); \operatorname{spt} f \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\}.$$
Prvky $\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{F})$ nazýváme **testovací funkce**, prostor $\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{F})$ pak nazýváme **prostorem testovacích funkcí**.

(c) Měřitelnou funkci $f : \Omega \to \mathbb{F}$ nazýváme **lokálně integrovatelnou v** Ω, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ existuje takové $r > 0$, že f je lebesguovsky integrovatelná na $U(\boldsymbol{x}, r)$ (tj. $\int_{U(\boldsymbol{x},r)} |f| < \infty$). Prostor všech lokálně integrovatelných funkcí v Ω značíme $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{F})$. (Přesněji jde o prostor tříd ekvivalence, kdy ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude.)

Poznámky:

- Místo $\mathscr{D}(\Omega, \mathbb{F})$ a $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{F})$ často píšeme jen $\mathscr{D}(\Omega)$ a $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
- Nechť $\Omega_1 \subset \Omega_2$ jsou dvě otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^d$. Pokud funkci $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_1)$ rozšíříme nulou na $\Omega_2 \setminus \Omega_1$, výsledná funkce bude patřit do $\mathscr{D}(\Omega_2)$. Můžeme tedy $\mathscr{D}(\Omega_1)$ uvažovat jako podprostor $\mathscr{D}(\Omega_2)$. Speciálně, $\mathscr{D}(\Omega)$ je vždy podprostorem $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.
- Měřitelná funkce f je lokálně integrovatelná v Ω, právě když pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$ je $\int_K |f| < \infty$.
- Prostor $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ obsahuje všechny spojité funkce na Ω, jakož i všechny funkce z $L^p(\Omega)$ pro $p \in [1, \infty]$.

Příklady 1 (příklady $\mathcal{C}^\infty$ funkcí).

(1) *Definujme funkci $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem*
$$h_1(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ e^{-1/t}, & t > 0. \end{cases}$$
Pak $h_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, h_1 je nulová na $(-\infty, 0]$ a kladná na $(0, \infty)$.

(2) *Definujme funkci $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $h_2(t) = h_1(1 - 4t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Pak $h_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, h_2 je kladná na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a nulová v ostatních bodech $\mathbb{R}$. Speciálně platí, že $h_2 \in \mathscr{D}((-1, 1))$.*

(3) *Definujme funkci $h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $h_3(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{-1+2t} h_2$, kde $c = \int_{-\infty}^{\infty} h_2$. Pak $h_3 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, h_3 je nulová na $(-\infty, \frac{1}{4}]$, konstantně rovna jedné na $[\frac{3}{4}, \infty)$ a rostoucí na $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.*

Tvrzení 2.

(a) *Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ a $0 < r < s$. Definujme funkci $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem*
$$\varphi(\boldsymbol{x}) = h_3\left(\frac{s^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2}{s^2 - r^2}\right), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$
kde h_3 je funkce definovaná v Příkladu 1(3). Pak $\varphi \in \mathscr{D}(U(\boldsymbol{a}, s))$, φ nabývá pouze hodnot z intervalu $[0, 1]$ a φ je konstantně rovno jedné na $U(\boldsymbol{a}, r)$.

(b) (Urysohnovo lemma pro hladké funkce) *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní množina a $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina obsahující K. Pak existuje funkce $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}^d$ taková, že* $\operatorname{spt} \varphi$ *je kompaktní podmnožina G, která je konstantně rovna jedné na množině K.*

Důsledek 3. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Pak pro $p \in [1, \infty)$ je $\mathscr{D}(\Omega)$ hustý podprostor $L^p(\Omega)$.*

Větička 4. *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f \in \mathcal{C}^1(a,b)$. Pak pro $\varphi \in \mathscr{D}((a,b))$ platí*

$$\int_a^b f\varphi' = -\int_a^b f'\varphi.$$

Definice. Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$.

- Funkce $g \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ se nazývá **slabou derivací** funkce f, pokud pro každou $\varphi \in \mathscr{D}((a,b))$ platí
$$\int_a^b f\varphi' = -\int_a^b g\varphi.$$
- Nechť μ je konečná regulární borelovská míra na (a,b) (znaménková či komplexní). Říkáme, že míra μ je **slabou derivací** funkce f, pokud pro každou $\varphi \in \mathscr{D}((a,b))$ platí
$$\int_a^b f\varphi' = -\int_{(a,b)} \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

Příklad 5.

(1) *Nechť $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Pak slabou derivací funkce f je funkce $g(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$.*

(2) *Nechť f je charakteristická funkce intervalu $(0,\infty)$. Pak slabou derivací funkce f je δ_0, Diracova míra nesená bodem 0.*

Lemma 6. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.*

- *Nechť μ je (konečná) znaménková či komplexní regulární borelovská míra na Ω. Pokud pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ platí $\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu = 0$, pak $\mu = 0$.*
- *Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ platí $\int_\Omega f\varphi = 0$. pak $f = 0$ skoro všude na Ω.*

Tvrzení 7. *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$. Pokud pro každou $\varphi \in \mathscr{D}((a,b))$ platí $\int_a^b f\varphi' = 0$, je funkce f konstantní (tj. existuje konstanta c, pro kterou $f = c$ skoro všude na (a,b)).*

Jinými slovy: Je-li slabou derivací funkce $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ nulová funkce, je f konstantní (ve výše uvedeném smyslu).

Věta 8. *Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$.*

(a) *Slabá derivace f je jednoznačně určena. Tj., jsou-li dvě funkce $g_1, g_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ slabou derivací funkce f, pak $g_1 = g_2$ skoro všude. Podobně, jsou-li dvě míry μ_1, μ_2 slabou derivací funkce f, pak $\mu_1 = \mu_2$.*

(b) *Je-li f absolutně spojitá na $[a,b]$, pak má vlastní derivaci skoro všude, $f' \in L^1((a,b))$ a f' je slabou derivací funkce f.*
Obráceně, má-li funkce f má slabou derivaci $g \in L^1((a,b))$, pak existuje funkce f_0 absolutně spojitá na $[a,b]$, která se rovná f skoro všude na (a,b). V tom případě $g = f_0'$ skoro všude.
Obecněji, funkce f má slabou derivaci v $L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$, právě když existuje funkce f_0 lokálně absolutně spojitá na (a,b) (tj. absolutně spojitá na každém uzavřeném podintervalu $[c,d] \subset (a,b)$) taková, že $f_0 = f$ skoro všude.

(c) *Existuje konečná míra μ, která je slabou derivací funkce f, právě když existuje funkce f_0 konečné variace na $[a,b]$ taková, že $f_0 = f$ skoro všude na (a,b). V tom případě pro každý podinterval $(c,d) \subset (a,b)$ platí*
$$\mu((c,d)) = \lim_{x \to d-} f_0(x) - \lim_{x \to c+} f_0(x).$$
Navíc, μ je reálná, právě když f_0 lze volit reálnou, a μ je nezáporná, právě když f_0 lze volit neklesající.