IV.3 Další vlastnosti distribucí

Značení: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina.

- Pro $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ a $N \in \mathbb{N}_0$ označme

  $\|\varphi\|_N = \max\{\|D^\alpha \varphi\|_\infty ; \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N\} = \sup\{|D^\alpha \varphi(x)| ; x \in \Omega, \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N\}.$

- Pro $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ položme

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}.$$

- Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní podmnožina, položme

$$\mathscr{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega); \operatorname{spt} \varphi \subset K\}.$$

Větička 12. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Pak platí:*

(a) *Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ je $\|\cdot\|_N$ norma na $\mathscr{D}(\Omega)$.*
(b) *ρ je metrika na $\mathscr{D}(\Omega)$.*
(c) *Nechť (φ_n) je posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Pak $\rho(\varphi_n, \varphi) \to 0$, právě když pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ je $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$.*
(d) *Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní, pak $\mathscr{D}_K(\Omega)$ je lineární podprostor $\mathscr{D}(\Omega)$, který je úplný v metrice ρ.*
(e) *Nechť (φ_n) je posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathscr{D}(\Omega)$, právě když platí:*
  - *Existuje kompaktní podmnožina $K \subset \Omega$ taková, že $(\varphi_n) \subset \mathscr{D}_K(\Omega)$.*
  - *$\rho(\varphi_n, \varphi) \to 0$.*

  V tom případě $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$.

Věta 13 (charakterizace distribucí). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *$\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.*
(ii) *Pro každou posloupnost (φ_n) v $\mathscr{D}(\Omega)$, která konverguje k nule v $\mathscr{D}(\Omega)$ platí $\Lambda(\varphi_n) \to 0$.*
(iii) *Pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$ je zúžení Λ na $\mathscr{D}_K(\Omega)$ spojité v metrice ρ.*
(iv) *Pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$ tak, že*

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N, \quad \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Poznámka. Hodnota N i C v bodě (iv) v předchozí větě závisí na volbě kompaktní podmnožiny K. V některých důležitých případech N na K nezávisí. O tom pojednává následující definice.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a Λ je distribuce na Ω. Říkáme, že distribuce Λ je **konečného řádu**, pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že

$$\forall K \subset \Omega \text{ kompaktní } \exists C > 0 \forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) : |\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N .$$

Nejmenší takové N nazýváme **řádem distribuce** Λ. Není-li distribuce Λ konečného řádu, říkáme, že je **nekonečného řádu** nebo též **řádu nekonečno**.

Příklad 14. *Distribuce Λ_f a Λ_μ z Příkladů 9(1–3) jsou řádu nula. Distribuce z Příkladu 9(4) je řádu jedna. Příkladem distribuce řádu nekonečno na $\mathbb{R}$ je*

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n).$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Řekneme, že posloupnost (Λ_n) v $\mathscr{D}'(\Omega)$ **konverguje** k distribuci Λ, pokud konverguje bodově na $\mathscr{D}(\Omega)$, tj. pokud $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každé $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Větička 15 (o konvergenci distribucí). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Pak platí:*

(a) *Je-li (Λ_n) je posloupnost distribucí na Ω, která konverguje k distribuci Λ, pak*
  - *pro každý multiindex α je $D^\alpha \Lambda_n \to D^\alpha \Lambda$,*
  - *pro každou $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ je $f\Lambda_n \to f\Lambda$.*

(b) *Je-li (f_n) posloupnost v $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ konvergující v $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ k funkci f (tj., $\int_K |f_n - f| \to 0$ pro každou kompaktní $K \subset \Omega$), pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.*

(c) *Je-li $p \in [1, \infty]$ a (f_n) posloupnost v $L^p(\Omega)$ konvergující v $L^p(\Omega)$ k funkci f, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.*

(d) *Je-li (φ_n) posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ konvergující v $\mathscr{D}(\Omega)$ k funkci φ, pak $\Lambda_{\varphi_n} \to \Lambda_\varphi$.*

Věta 16 (Banach-Steinhausova věta pro distribuce). *Nechť (Λ_n) je posloupnost distribucí na Ω taková, že pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ posloupnost $(\Lambda_n(\varphi))$ konverguje. Označíme-li $\Lambda(\varphi) = \lim_n \Lambda_n(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, pak $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.*

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a Λ je distribuce na Ω.

- Nechť $G \subset \Omega$ je otevřená. Řekneme, že Λ je **nulová na** G, jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ splňující $\operatorname{spt}\varphi \subset G$.
- **Nosičem** distribuce Λ rozumíme množinu

$$\begin{aligned}\operatorname{spt}\Lambda &= \Omega \setminus \bigcup\{G \subset \Omega \text{ otevřená}; \Lambda \text{ je nulová na } G\}\\ &= \{x \in \Omega; \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \operatorname{spt}\varphi \subset U(x,\varepsilon) \;\&\; \Lambda(\varphi) \neq 0\}\end{aligned}$$

- Říkáme, že Λ **má kompaktní nosič**, je-li $\operatorname{spt}\Lambda$ kompaktní podmnožina Ω.

Větička 17 (o nosiči distribuce). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a Λ je distribuce na Ω. Pak platí:*

(a) *Pokud $\Lambda = \Lambda_f$ pro $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak $\operatorname{spt}\Lambda = \operatorname{spt} f$, kde*
$$\operatorname{spt} f = \{\boldsymbol{x} \in \Omega; \lambda^d(\{\boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{x},\varepsilon); f(\boldsymbol{y}) \neq 0\}) > 0 \text{ pro každé } \varepsilon > 0\}.$$
Je-li f spojitá, splývá tato množina s dříve definovaným $\operatorname{spt} f$.

(b) *Pokud $\Lambda = \Lambda_\mu$ pro nějakou míru μ, pak $\operatorname{spt}\Lambda = \operatorname{spt}\mu$, kde*
$$\operatorname{spt}\mu = \Omega \setminus \{G \subset \Omega \text{ otevřená}; \mu(A) = 0 \text{ pro každou } A \subset G \text{ borelovskou}\}.$$

(c) *Pokud $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ splňuje $\operatorname{spt}\varphi \cap \operatorname{spt}\Lambda = \emptyset$, pak $\Lambda(\varphi) = 0$.*

(d) *Má-li Λ kompaktní nosič, pak existují taková $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$, že platí*
$$|\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N \text{ pro každé } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$
Speciálně, Λ je konečného řádu.

(e) *$\operatorname{spt}\Lambda$ je jednobodová množina $\{p\}$, právě když existuje $N \in \mathbb{N}_0$ a čísla c_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$, ne všechna nulová, že platí*
$$\Lambda = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_p},$$
tj. existují čísla d_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$, ne všechna nulová, že platí
$$\Lambda(\varphi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} d_\alpha D^\alpha \varphi(p), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$