Věta IV.19 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f*\varphi$ je všude definovaná,

$f*\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $D^\alpha(f*\varphi) = f*D^\alpha\varphi$

Dk: $K := \operatorname{spt}\varphi \Rightarrow K$ je kompaktní

- $x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow f*\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\varphi(x-y)\,dy = \int_{x-K} f(y)\,\varphi(x-y)$

  $\Rightarrow f*\varphi(x)$ je ~~def~~ konečná (f integrovatelná na $x-K$, $\varphi(x-\cdot)$ spojitá (tedy i omezená) na $x-K$))

- $f*\varphi$ spojitá: věta o spojitosti podle parametru

  Γ $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r>0$

  $x \mapsto f(y)\varphi(x-y)$ je spojitá na $U(x_0,r)$ pro každé y

  $y \mapsto f(y)\varphi(x-y)$ je měřitelná pro každé x

  $|f(y)\varphi(x-y)| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot |f(y)| \cdot \chi_{U(x_0,r)-K}$

  integrovatelná majoranta $\lrcorner$

- pro C^∞ a $D^\alpha(f*\varphi) = f*D^\alpha\varphi$ stačí použít indukci a dokázat to pro jednu parciální derivaci.

Γ $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r>0$ ... $h(x,y) = f(y)\varphi(x-y)$

- $y \mapsto h(x,y)$ je měřitelná
- $\frac{\partial}{\partial x_1} h(x,y) = f(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x-y)$
- $|f(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x-y)| \leq \underbrace{\|\tfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\|_\infty \cdot |f(y)| \cdot \chi_{U(x_0,r)-K}}_{}$

  integrovatelná majoranta)