Věta IV. 20. Nechť (h_j) je aproximativní jednotka v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

(a) f spojitá na $\mathbb{R}^d \Rightarrow f * h_j \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}^d$

f stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^d \Rightarrow f * h_j \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}^d$

<u>Dk:</u> $x \in \mathbb{R}^d$, $j \in \mathbb{N}$:

$$|f * h_j(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) h_j(x-y)\,dy - f(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} h_j(x-y)\,dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(y) - f(x)| \cdot h_j(x-y)\,dy$$

f spojitá: $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$. Ukážeme, že $f * h_j \rightrightarrows f$ na $U(x_0, r)$

$\varepsilon > 0$ libovolné. Protože f je spojitá na kompaktní množině $B(x_0, 2r)$, je tam i stejnoměrně spojitá, tedy existuje $\delta > 0$, že kdykoli $x_1, x_2 \in B(x_0, 2r)$, $\|x_1 - x_2\| < \delta$, pak $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Zvolme $j_0 \in \mathbb{N}$, aby pro $j \geq j_0$ bylo $\operatorname{spt} h_j \subset U(0, \delta)$

pak pro $x \in U(x_0, r)$ je

$$|f * h_j(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(y) - f(x)|\, h_j(x-y)\,dy =$$

$$= \int_{x - U(0,\delta)} |f(y) - f(x)|\, h_j(x-y)\,dy \leq \int_{x - U(0,\delta)} \varepsilon \cdot h_j(x-y) \leq \varepsilon$$

$y \in x - U(0,\delta) \Rightarrow \|y - x\| < \delta \Rightarrow \|y\| < r + \delta < 2r$

tedy $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$

f stejnoměrně spojitá: podobně: $\varepsilon > 0$ ... ex. $\delta > 0$, že $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

$j_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $j \geq j_0$ je $\operatorname{spt} h_j \subset U(0, \delta)$

Pak $\forall x \in \mathbb{R}^d$ je $|f * h_j(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

(b) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní. Nechť

$L = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, L) \leq 1\}$ $\Rightarrow$ L je také kompaktní

Označme $g := f \cdot \chi_L$. Pak $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$\varepsilon > 0$ ... Dle Lemmatu 21 existuje $\delta > 0$, že pro $\|y\| < \delta$ je $\|\tau_y g - g\|_p < \varepsilon$. BÚNO $\delta < 1$

Dále ex. j_0, že pro $j \geq j_0$ je $\operatorname{spt} h_j \subset U(0, \delta)$

Nechť $j \geq j_0$. Pak:

$$\int_K |f * h_j(x) - f(x)|\, dx = \int_K \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) h_j(y)\, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^d} h_j(y)\, dy \Big|\, dx$$

$$= \int_K \Big| \int_{U(0,\delta)} (f(x-y) - f(x))\, h_j(y)\, dy \Big|\, dx \leq \int_K \int_{U(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\, h_j(y)\, dy\, dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{U(0,\delta)} h_j(y) \left(\int_K |f(x-y) - f(x)|\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{U(0,\delta)} h_j(y) \left(\int_K |g(x-y) - g(x)|\, dx \right) dy \leq \int_{U(0,\delta)} h_j(y) \cdot \|\tau_y g - g\|_1\, dy$$

$$< \varepsilon \int_{U(0,\delta)} h_j(y)\, dy = \varepsilon.$$

(c) $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$. Dle Lemmatu 21 ex. $\delta > 0$, že pro $\|y\| < \delta$ je $\|\tau_y f - f\|_p < \varepsilon$. Dále ex. j_0, že pro $j \geq j_0$ je $\operatorname{spt} h_j \subset U(0, \delta)$

Zvolme $j \geq j_0$ a $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $\|g\|_q \leq 1$

Pak $\left|\int_{\mathbb{R}^d} (f * \varphi_j(x) - f(t)) \cdot g(t)\, dt\right| =$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (f(t-y) - f(t)) \varphi_j(y)\, dy \cdot g(t)\, dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t-y) - f(t)|\, \varphi_j(y)\, |g(t)|\, dy\, dt \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(y) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t-y) - f(t)|\, |g(t)|\, dt \right) dy$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(y) \cdot \|\tau_y f - f\|_p \|g\|_q\, dy < \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(y)\, dy = \varepsilon$$

(d) $f \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$ supp f je kompaktna podmn. Ω

$\Rightarrow$ ob. $\varepsilon > 0$, da $\overline{\text{supp} f + U(0, \varepsilon)} \subset \Omega$

Izberemo $j_0 \in \mathbb{N}$, da za $j \geq j_0$ je supp $h_j \subset U(0, \varepsilon)$

Pak za $j \geq j_0$ velja: $f * h_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Věta 19)

supp $(f * h_j) \subset$ supp $f + U(0, \varepsilon)$ (Věta 18 (d))

Tedy $f * h_j \in \mathcal{D}(\Omega)$

Navíc supp $(f * h_j) \subset \overline{\text{supp} f + U(0, \varepsilon)}$, což je kompaktní podmn. Ω

$$\text{a } D^\alpha (f * h_j) \overset{\text{V19}}{=} D^\alpha f * h_j \underset{\text{dle bodu (a)}}{\rightrightarrows} D^\alpha f$$

Tedy $f * h_j \to f$ v $\mathcal{D}(\Omega)$.