Lemma: Nechť $p \in [1, \infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Pak $\lim\limits_{y \to 0} \|\tau_y f - f\|_p = 0$

Důkaz: **Krok 1:** $f = \chi_K$, kde K je kompaktní

$\varepsilon > 0 \Rightarrow$ ex. $U \supset K$ otevřená, $\lambda^d(U \setminus K) < \varepsilon$

zvolme $\delta > 0$, $\delta < \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus U)$. To lze, protože ta vzdálenost je kladná (neboť K je kompaktní)

Nechť $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\| < \delta$. Pak

$$\|\tau_y f - f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_K(x-y) - \chi_K(x)|^p \, dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{(K+y)\triangle K}(x)|^p \, dx\right)^{1/p} = \left(\lambda^d((K+y) \triangle K)\right)^{1/p}$$

Přitom

$$(K+y) \triangle K = ((K+y) \setminus K) \cup (K \setminus (K+y)) =$$

$$= (K \cup (K+y)) \setminus (K \cap (K+y)) \underset{\|y\| < \delta \Rightarrow K+y \subset U}{\subset} U \setminus (K \cap (K+y)) =$$

$$= (U \setminus K) \cup (U \setminus (K+y))$$

Tedy

$$\lambda^d((K+y) \triangle K) \leq \underbrace{\lambda^d(U \setminus K)}_{< \varepsilon} + \lambda^d(U \setminus (K+y)) < 2\varepsilon$$

$$\lambda^d(U \setminus (K+y)) = \lambda^d(U) - \lambda^d(K+y) = \lambda^d(U) - \lambda^d(K) = \lambda^d(U \setminus K) < \varepsilon$$

Tedy $\|\tau_y f - f\|_p < (2\varepsilon)^{1/p}$

Krok 2 $f \in L^p$ obecná, $\varepsilon > 0$. Pak existuje g, g je lineární kombinace charakteristických funkcí kompaktních množin, $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

Dle kroku 1 ex. $\delta > 0$, že pro $\|y\| < \delta$ je $\|\tau_y g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

Pak pro $\|y\| < \delta$ je

$$\|\tau_y f - f\|_p \leq \|\tau_y f - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - g\|_p + \|g - f\|_p < 3\,\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$