# IV.4 Konvoluce funkcí a aproximativní jednotka

**Značení.** Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{F}$ je funkce.

- Pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ definujme funkci $\tau_{\boldsymbol{y}} f$ (tzv. **posun** funkce $f$) vzorcem
$$(\tau_{\boldsymbol{y}} f)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$
- **Otočením** funkce $f$ budeme rozumět funkci $\breve{f}$ definovanou vzorcem
$$\breve{f}(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

**Poznámka:** Tyto operace mají smysl i pro funkce definované pouze na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^d$. Pak definiční obor posunu bude patřičně posunutý definiční obor $f$ a definiční obor otočení bude otočený definiční obor $f$.

**Definice.** Nechť $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{F}$ jsou měřitelné funkce. Jejich **konvolucí** $f * g$ rozumíme funkci definovanou předpisem
$$f * g(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}y$$
pro ta $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál existuje.

**Poznámky:**

- Existence ani hodnota uvedeného integrálu se nezmění, pokud $f$ a $g$ změníme na množině míry nula. Protože pro každou měřitelnou funkci $f$ na $\mathbb{R}^d$ existuje borelovská funkce $\tilde{f}$ na $\mathbb{R}^d$, která se rovná $f$ skoro všude, ve všech tvrzeních o konvoluci lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že zúčastněné funkce jsou borelovské.
- Ze symetrie a translační invariance Lebesgueovy míry plyne, že $f * g = g * f$ pro libovolné dvě měřitelné funkce $f, g$ na $\mathbb{R}^d$.
- Konvoluci lze vyjádřit vzorcem $f * g(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \tau_{\boldsymbol{x}} \breve{g}$.

**Věta 18** (konvoluce funkcí z $L^1$ a $L^p$).

(a) *Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak funkce $f * g$ je skoro všude definovaná a skoro všude konečná. Navíc $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.*

(b) *Operace $*$ je na $L^1(\mathbb{R}^d)$ komutativní a asociativní. Prostor $L^1(\mathbb{R}^d)$ opatřený navíc touto operací je komutativní algebra.*

(c) *Nechť $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak funkce $f * g$ je skoro všude definovaná a skoro všude konečná. Navíc $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \cdot \|g\|_1$.*

(d) *Nechť $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a obě funkce mají kompaktní nosič. Pak $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\operatorname{spt}(f * g) \subset \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g$.*

**Věta 19** (zhlazování pomocí konvoluce). *Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak funkce $f * \varphi$ je všude definovaná a konečná, navíc $f * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a pro každý multiindex $\alpha$ platí $D^\alpha(f * \varphi) = f * D^\alpha\varphi$.*

**Definice.** Zvolme nezápornou $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pro kterou platí $\int_{\mathbb{R}^d} h = 1$. Pro $j \in \mathbb{N}$ definujme funkci $h_j$ předpisem

$$h_j(\boldsymbol{x}) = j^d h(j\boldsymbol{x}) \text{ pro } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Posloupnost $(h_j)$, která takto vznikne, nazýváme **aproximativní jednotkou** v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

**Poznámka.** Nechť $(h_j)$ je aproximativní jednotka v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

- Pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $h_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\operatorname{spt} h_j = \frac{1}{j} \operatorname{spt} h$. Speciálně tedy platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $j \geq j_0$ je $\operatorname{spt} h_j \subset U(\boldsymbol{o}, \varepsilon)$.
- Pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $h_j$ nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d} h_j = 1$.

**Věta 20** (o konvoluci s aproximativní jednotkou). *Nechť $(h_j)$ je aproximativní jednotka v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak platí:*

(a) *Je-li $f$ spojitá funkce na $\mathbb{R}^d$, pak $f * h_j$ konverguje lokálně stejnoměrně k $f$. Je-li $f$ dokonce stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^d$, je tato konvergence stejnoměrná na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Je-li $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * h_j$ konverguje k $f$ v $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (pro definici viz Větička 15(b)).*

(c) *Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $p \in [1, \infty)$, je $f * h_j \to f$ v $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

(d) *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, pak pro dostatečně velká $j \in \mathbb{N}$ platí $f * h_j \in \mathscr{D}(\Omega)$ a navíc $f * h_j \to f$ v $\mathscr{D}(\Omega)$.*

**Poznámka.** S použitím Věty 20(c) a Věty 18(d) lze dokázat Důsledek 3, tj. hustotu $\mathscr{D}(\Omega)$ v $L^p(\Omega)$ pro $p \in [1, \infty)$.

**Lemma 21.** *Nechť $p \in [1, \infty)$ a $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Pak platí*

$$\lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{o}} \|\tau_{\boldsymbol{y}} f - f\|_p = 0.$$