Lemma $g : [0,\infty) \to \mathbb{F}$ měřitelná.

Pak $$\int_{\mathbb{R}^d} g(\|x\|)\,dx = d\cdot\lambda^d(B(0,1))\cdot\int_0^\infty r^{d-1}g(r)\,dr,$$

má-li pravá strana smysl.

(1) $g = \chi_{(a,b)}$, $0 \le a < b < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{(a,b)}(\|x\|)\,dx = \int_{B(0,b)\setminus B(0,a)} 1 = \lambda^d(B(0,b)) - \lambda^d(B(0,a))$$

$$= (b^d - a^d)\,\lambda^d(B(0,1))$$

$$d\cdot\int_0^\infty r^{d-1}\chi_{(a,b)}(r)\,dr = \int_a^b d\,r^{d-1}\,dr = \left[r^d\right]_a^b = (b^d - a^d)$$

Tedy v tomto případě to vyjde

(2) $g = \chi_{(a,\infty)}$, $a \ge 0$ $\Rightarrow$ obě strany vyjdou $+\infty$

(3) $g = \chi_U$, U otevřená

$\Rightarrow U = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$, I_n disj. otevřené intervaly (může být i konečné sjednocení)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_U(\|x\|)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\sum_n \chi_{I_n}(\|x\|)\,dx = \sum_n \int_{\mathbb{R}^d}\chi_{I_n}(\|x\|)\,dx$$

$$d\,\lambda^d(B(0,1))\int_0^\infty r^{d-1}\chi_U(r)\,dr = \sum_n d\,\lambda^d(B(0,1))\int_0^\infty r^{d-1}\chi_{I_n}(r)\,dr$$

(v obou případech se používá Leviho věta)

$\Rightarrow$ rovnost plyne z (1) a (2)

(4) $g = \chi_A$, A měřitelná, ~~konečné míry~~ omezená

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, F \subset A$ uzavřená, $U \supset A$ otevřená omezená, $\lambda^1(U \setminus F) < \varepsilon$

Pak $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \chi_F(\|x\|)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(\|x\|)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^d} \chi_U(\|x\|)\,dx$

a $\displaystyle d\,\lambda^d(B(0,1))\int_0^\infty r^{d-1}\chi_F(r)\,dr \le d\,\lambda^d(B(0,1))\int_0^\infty r^{d-1}\chi_A(r)\,dr$

$\displaystyle \le d\,\lambda^d(B(0,1))\int_0^\infty r^{d-1}\chi_U(r)\,dr$

Přitom tyto výrazy pro χ_U se rovnají dle (3).

Navíc:

$$d\,\lambda^d(B(0,1))\int_0^\infty r^{d-1}(\chi_U(r)-\chi_A(r)) \le d\,\lambda^d B(0,1)\int_0^\infty r^{d-1}(\chi_{U\setminus F}(r))\,dr$$

$$\| $$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{U\setminus F}(\|x\|)\,dx$$

Podobně $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} (\chi_U(\|x\|) - \chi_A(\|x\|))\,dx \le \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{U\setminus F}(\|x\|)\,dx$

A omezená $\Rightarrow A \subset (0, R)$. BÚNO $U \subset (0,R)$ ... $U \setminus F = \bigcup_j (a_j, b_j)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{U\setminus F}(\|x\|) = d\,\lambda^d(B(0,1))\int_0^\infty r^{d-1}\chi_{U\setminus F}(r)\,dr =$$

$$= d\,\lambda^d(B(0,1))\int_{U\setminus F} r^{d-1}\,dr \le d\cdot\lambda^d(B(0,1))\cdot R^{d-1}\,\lambda^1(U\setminus F)$$

$$< \varepsilon\cdot d\cdot\lambda^d(B(0,1))\cdot R^{d-1}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\mathbb{R}^d}\chi_A(\|x\|)\,dx - d\cdot\lambda^d(B(0,1))\int_0^\infty r^{d-1}\chi_A(r)\,dr\right| \le$$

$$\le \varepsilon\cdot d\,\lambda^d(B(0,1))\,R^{d-1}$$

$\Rightarrow$ platí rovnost

(5) $g = \chi_A$, A měř. obecná
$A_n := A \cap (0, n)$

Pak $A_n \nearrow A$, pro A_n rovnost platí
a zachová se díky Leviho větě

(6) g jednoduchá $\Rightarrow$ rovnost platí, protože má jednu stranu smysl

(7) $g \geq 0 \Rightarrow$ ex. jednoduché funkce, $g_n \nearrow g$ s.v.

pak $r^{d-1} g_n(r) \nearrow r^{d-1} g(r)$ s.v.

a tedy $g_n(\|t\|) \nearrow g(\|t\|)$ s.v.

$\Rightarrow$ rovnost se zachová díky Leviho věta

(8) g reálná ... $g = g^+ - g^-$

(9) g komplexní ... $g = \operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g$

<u>Důsledek:</u> $m > \frac{d}{2} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+\|t\|^2)} \, d\, m_d(t) < \infty$

<u>Dk:</u> Stačí uvažovat integrál dle λ^d. Podle lemmatu:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+\|t\|^2)^m} dx = d \cdot \lambda^d(B(0,1)) \cdot \int_0^\infty \frac{1}{(1+r^2)^m} \cdot r^{d-1} < \infty ,$$

protože $2m - d + 1 > 1$