IV.6 Fourierova transformace funkcí a Schwartzův prostor

Značení a úmluva: Připomeňme, že λ^d značí Lebesgueovu míry na $\mathbb{R}^d$. Označme $m_d = (2\pi)^{-d/2}\lambda^d$. V tomto i následujícím oddílu budeme prostorem $L^p(\mathbb{R}^d)$ rozumět prostor $L^p(m_d)$. Taktéž konvoluci budeme uvažovat vůči této míře, tj.

$$f * g(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}m_d(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

Navíc, všechny prostory uvažujeme komplexní.

Definice. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. **Fourierovou transformací** funkce f nazýváme funkci $\widehat{f}$ definovanou vzorcem

$$\widehat{f}(\boldsymbol{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle}\,\mathrm{d}m_d(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d.$$

Poznámky:

- $\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle$ značí standardní skalární součin $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{x}$ v $\mathbb{R}^n$. V literatuře se často značí $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{x}$, my se přidržíme značení z první kapitoly.
- Pro $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ definujme funkci $e_{\boldsymbol{t}}$ vzorcem $e_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) = e^{i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle}$ pro $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$. Tyto funkce se často nazývají **charaktery na** $\mathbb{R}^d$. Fourierova transformace lze jejich pomocí vyjádřit takto:

$$\widehat{f}(\boldsymbol{t}) = (f * e_{\boldsymbol{t}})(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f\cdot\overline{e_{\boldsymbol{t}}}\,\mathrm{d}m_d, \quad \text{pro } \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d \text{ a } f\in L^1(\mathbb{R}^d)$$

- Každý charakter $\boldsymbol{e_t}$ je spojitá funkce splňující $|\boldsymbol{e_t}| = 1$ na $\mathbb{R}^d$. Odtud je zřejmé, že pro každé $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ je funkce $\widehat{f}$ definovaná na $\mathbb{R}^d$ a splňuje $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \le \|f\|_1$.

Definice a značení:

- Pro $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ a multiindex $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$ označme $\boldsymbol{t}^\alpha = t_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot t_d^{\alpha_d}$. (Stejné značení budeme používat i pro $\boldsymbol{t}\in\mathbb{C}^d$.)
- **Polynomem na** $\mathbb{R}^d$ rozumíme funkci P na $\mathbb{R}^d$ tvaru

$$P(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\le N} c_\alpha \boldsymbol{t}^\alpha, \quad \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d,$$

  kde $N\in\mathbb{N}_0$ a c_α, $\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\le N$ jsou nějaká komplexní čísla (**koeficienty** polynomu P). Pokud navíc existuje multiindex α, pro který $|\alpha| = N$ a $c_\alpha\ne 0$, říkáme, že polynom P má **stupeň** N.
- Polynom na $\mathbb{R}^d$ chápeme vždy jako funkci na $\mathbb{R}^d$, tj. jako funkci d reálných proměnných. Nicméně do takového polynomu lze zřejmým způsobem dosadit i prvky $\mathbb{C}^d$, což se bude občas hodit.
- Je-li P polynom na $\mathbb{R}^d$, označme symbolem $\check{P}$ polynom na $\mathbb{R}^d$ definovaný vzorcem $\check{P}(\boldsymbol{t}) = P(i\boldsymbol{t})$ pro $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$, tj. (je-li P výše uvedeného tvaru)

$$\check{P}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\le N} i^{|\alpha|}c_\alpha \boldsymbol{t}^\alpha, \quad \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d.$$

- Je-li P polynom na $\mathbb{R}^d$ výše uvedeného tvaru a f je funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}^d$ (nebo obecněji na otevřené podmnožině $\mathbb{R}^d$), pak symbolem $P(D)f$ značíme funkci definovanou vzorcem

$$P(D)f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\le N} c_\alpha D^\alpha f.$$

  (Tato definice má smysl i pro funkce třídy $\mathcal{C}^N$.)

Tvrzení 26 (základní vlastnosti Fourierovy transformace). *Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$. Pak platí:*

(a) $D^\alpha e_{\boldsymbol{t}} = i^{|\alpha|}\boldsymbol{t}^\alpha \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{t}}$ *pro každý multiindex* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.
(b) *Je-li P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak* $P(D)e_{\boldsymbol{t}} = \check{P}(\boldsymbol{t}) \cdot e_{\boldsymbol{t}}$.
(c) $\widehat{\tau_{\boldsymbol{y}} f} = e_{-\boldsymbol{y}} \cdot \widehat{f}$.
(d) $\widehat{e_{\boldsymbol{y}} \cdot f} = \tau_{\boldsymbol{y}} \widehat{f}$.
(e) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.
(f) *Nechť $\lambda > 0$ a $h(x) = f(\frac{\boldsymbol{x}}{\lambda})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{h}(\boldsymbol{t}) = \lambda^d \widehat{f}(\lambda \boldsymbol{t})$ pro $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$.*
(g) $\int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \widehat{g} \,\mathrm{d}m_d = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot g \,\mathrm{d}m_d$.

Definice.

- **Schwartzovým prostorem na** $\mathbb{R}^d$ rozumíme prostor funkcí

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d); \quad \begin{array}{c} \text{funkce } \boldsymbol{x} \mapsto (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^N D^\alpha f(\boldsymbol{x}) \\ \text{je omezená na } \mathbb{R}^d \\ \text{pro každé } N \in \mathbb{N}_0 \text{ a každý multiindex } \alpha \end{array} \right\}.$$

  Nehrozí-li nedorozumění (tj., je-li d předem dáno), místo $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ píšeme jen $\mathscr{S}$.
- Pro $f \in \mathscr{S}$ a $N \in \mathbb{N}_0$ položme

$$\begin{aligned} p_N(f) &= \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N} \left\| (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^N D^\alpha f(\boldsymbol{x}) \right\|_\infty \\ &= \sup\{ \left| (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^N D^\alpha f(\boldsymbol{x}) \right|; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N \}. \end{aligned}$$

  Pak p_N je norma na $\mathscr{S}$.
- Řekneme, že posloupnost (f_n) v $\mathscr{S}$ **konverguje v** $\mathscr{S}$ k funkci $f \in \mathscr{S}$, jestliže pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ platí $p_N(f_n - f) \xrightarrow{n} 0$.
- Pro $f, g \in \mathscr{S}$ položme $\rho(f, g) = \sum_{N=0}^\infty 2^{-N} \min\{p_N(f - g), 1\}$.

Větička 27 (charakterizace konvergence na Schwartzově prostoru).

(a) *ρ je metrika na $\mathscr{S}$, v níž je prostor $\mathscr{S}$ úplný.*
(b) *Je-li (f_n) posloupnost v $\mathscr{S}$ a $f \in \mathscr{S}$, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
  (i) $f_n \to f$ v $\mathscr{S}$.
  (ii) *Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a každý multiindex α platí*

$$(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^N D^\alpha f_n(\boldsymbol{x}) \rightrightarrows (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^N D^\alpha f(\boldsymbol{x}) \quad \text{na } \mathbb{R}^d.$$

  (iii) $\rho(f_n - f) \to 0$.

Poznámka. Je-li g měřitelná funkce na $[0, \infty)$, pak platí

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(\|x\|) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = d \cdot \lambda^d(B(\boldsymbol{o}, 1)) \cdot \int_0^\infty r^{d-1} g(r) \,\mathrm{d}r,$$

má-li jedna strana smysl. Tento vzorec lze snadno dokázat, je-li g charakteristická funkce intervalu, s využitím regularity Lebesgueovy míry se dokáže pro charakteristické funkce měřitelných množin a dále se postupuje způsobem standardním v teorii míry. Z tohoto vzorce se snadno plyne, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^m} \,\mathrm{d}m_d < \infty \text{ pro } m > \frac{d}{2}.$$

Věta 28 (vlastnosti Schwartzova prostoru a Fourierovy transformace na něm).

(a) $\mathscr{S} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p \in [1,\infty]} L^p(\mathbb{R}^d)$.
(b) *Následující zobrazení jsou spojitá zobrazení $\mathscr{S}$ do $\mathscr{S}$:*
  - $f \mapsto P \cdot f$, *je-li P polynom na* $\mathbb{R}^d$,
  - $f \mapsto g \cdot f$, *je-li* $g \in \mathscr{S}$,
  - $f \mapsto D^\alpha f$, *je-li α multiindex.*

(c) *Je-li $f \in \mathscr{S}$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$, pak*

$$\widehat{P(D)f} = \check{P} \cdot \widehat{f}, \quad \widehat{P \cdot f} = \check{P}(D)\widehat{f}.$$

(d) *Fourierova transformace je spojité lineární zobrazení $\mathscr{S}$ do $\mathscr{S}$.*

Důsledek 29. *Fourierova transformace je spojité lineární zobrazení prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, jehož norma je nejvýše 1.*

Poznámka: Tvrzení (c) z Věty 25 platí obecněji, nejen pro funkce z $\mathscr{S}$. Například, pokud f i $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ patří do $L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\boldsymbol{t}) = it_j\widehat{f}(\boldsymbol{t})$. Dále, pokud funkce f i $g(\boldsymbol{x}) = x_j f(\boldsymbol{x})$ patří do $L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\widehat{g} = i\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}$.

Lemma 30. *Uvažme funkci $\phi_d(\boldsymbol{x}) = e^{-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Pak platí $\phi_d \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\widehat{\phi_d} = \phi_d$.*

Věta 31 (věta o inverzi pro Schwartzův prostor).

(a) *Pro každé $f \in \mathscr{S}$ platí*

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot e_{\boldsymbol{x}} \,\mathrm{d}m_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{t}) e^{i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle} \,\mathrm{d}\boldsymbol{t}.$$

(b) *Fourierova transformace je homeomorfismus $\mathscr{S}$ na $\mathscr{S}$. Navíc pro každé $f \in \mathscr{S}$ platí*

$$\widehat{\widehat{f}} = \check{f}, \quad \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}} = f.$$

Důsledek 32 (věta o inverzi pro případ integrovatelné $\widehat{f}$). *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ je taková, že $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ platí*

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot e_{\boldsymbol{x}} \,\mathrm{d}m_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{t}) e^{i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle} \,\mathrm{d}\boldsymbol{t}.$$

Tvrzení 33. *Pro $f, g \in \mathscr{S}$ platí $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$. Speciálně, prostor $\mathscr{S}$ je uzavřený na konvoluci.*

Věta 34 (Plancherelova věta).

(a) *Pro každé $f \in \mathscr{S}$ platí $\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$.*

(b) *Existuje právě jedna lineární izometrie $\mathcal{P}$ prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$ na $L^2(\mathbb{R}^d)$ taková, že $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$ pro $f \in \mathscr{S}$.*

(c) *Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ platí $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$.*