IV.7 Temperované distribuce a jejich Fourierova transformace

Úmluva: V tomto oddílu budeme, stejně jako v oddílu předešlém, prostorem $L^p(\mathbb{R}^d)$ rozumět prostor $L^p(m_d)$ a konvoluci na $\mathbb{R}^d$ budeme taktéž uvažovat vůči míře m_d. Navíc, distribucí Λ_f budeme rozumět distribuci definovanou jako integrál podle m_d, tj. $\Lambda_f(\varphi) = \int \varphi f \, \mathrm{d}m_d$.

Navíc v tomto oddílu uvažujeme všechnu prostory komplexní.

Větička 35. *$\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý podprostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Navíc, pokud (φ_j) je posloupnost v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ konvergující v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ k funkci φ, pak také $\varphi_j \to \varphi$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Definice. **Temperovanou distribucí** na $\mathbb{R}^d$ rozumíme spojitý lineární funkcionál na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, tj. spojité lineární zobrazení $\Lambda : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$. Prostor temperovaných distribucí značíme $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ nebo jen $\mathscr{S}'$.

Poznámka: Je-li Λ temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$, pak její zúžení na $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je distribuce na $\mathbb{R}^d$. Prostor $\mathscr{S}'$ lze tedy díky Větičce 35 interpretovat jako lineární podprostor $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Při této interpretaci je daná distribuce $\Lambda \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ temperovaná, právě když existuje její spojité rozšíření na $\mathscr{S}$.

Tvrzení 36 (charakterizace temperovaných distribucí).

(a) *Nechť $\Lambda : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ je lineární zobrazení. Pak Λ je temperovaná distribuce, právě když existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$, pro která platí*

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C p_N(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

(b) *Nechť $\Lambda \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Pak Λ je temperovaná (ve smyslu předchozí poznámky), právě když existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$, pro která platí*

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C p_N(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Tvrzení 37 (příklady temperovaných distribucí).

(a) *Každá distribuce s kompaktním nosičem je temperovaná.*

(b) *Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro nějaké $p \in [1, \infty]$, pak Λ_f je temperovaná distribuce a je dána vzorcem*

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f\varphi \, \mathrm{d}m_d, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

(c) *Je-li f měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d$, pro kterou existuje polynom P na $\mathbb{R}^d$ splňující $|f| \leq |P|$ na $\mathbb{R}^d$, pak Λ_f je temperovaná distribuce a je dána vzorcem z bodu (b).*

(d) *Je-li μ znaménková či komplexní míra na $\mathbb{R}^d$, pak Λ_μ je temperovaná distribuce a je dána vzorcem*

$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, \mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Tvrzení 38 (operace s temperovanými distribucemi). *Nechť $\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

(a) *Nechť α je libovolný multiindex. Pak $D^\alpha \Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Navíc,*

$$D^\alpha \Lambda(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

(b) *Nechť $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nebo f je polynom na $\mathbb{R}^d$. Pak $f\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Navíc, $D^\alpha \Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Navíc,*

$$f\Lambda(\varphi) = \Lambda(f\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Definice. Nechť $(\Lambda_n) \subset \mathscr{S}'$ je posloupnost temperovaných distribucí na $\mathbb{R}^d$. Řekneme, že posloupnost (Λ_n) **konverguje v** $\mathscr{S}'$ k temperované distribuci Λ, pokud $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathscr{S}$.

Tvrzení 39. *Nechť (Λ_n) je posloupnost v $\mathscr{S}'$ konvergující v $\mathscr{S}'$ k $\Lambda \in \mathscr{S}'$.*

(a) *$D^\alpha \Lambda_n \to D^\alpha \Lambda$ v $\mathscr{S}'$ pro každý multiindex α.*
(b) *$f\Lambda_n \to f\Lambda$, je-li $f \in \mathscr{S}$ nebo f je polynom na $\mathbb{R}^d$.*

Věta 40 (Banach-Steinhausova věta pro temperované distribuce). *Nechť (Λ_n) je posloupnost temperovaných distribucí. Pokud pro každé $\varphi \in \mathscr{S}$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi)$, pak limitní zobrazení $\Lambda(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{S}$, je temperovaná distribuce.*

Definice. Nechť Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$. Její **Fourierovou transformací** rozumíme zobrazení

$$\widehat{\Lambda}(\varphi) = \Lambda(\widehat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Věta 41 (vlastnosti Fourierovy transformace na $\mathscr{S}'$).

(a) *Fourierova transformace je lineární bijekce $\mathscr{S}'$ na $\mathscr{S}'$, pro $\Lambda \in \mathscr{S}'$ platí*
$$\widehat{\widehat{\Lambda}} = \check{\Lambda}, \quad \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{\Lambda}}}} = \Lambda.$$
(b) *Nechť (Λ_n) je posloupnost v $\mathscr{S}'$ a $\Lambda \in \mathscr{S}'$. Pak $\Lambda_n \to \Lambda$ v $\mathscr{S}'$, právě když $\widehat{\Lambda_n} \to \widehat{\Lambda}$ v $\mathscr{S}'$.*
(c) *Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ platí $\widehat{\Lambda_f} = \Lambda_{\widehat{f}}$.*
(d) *Pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ platí $\widehat{\Lambda_f} = \Lambda_{\mathcal{P}(f)}$, kde $\mathcal{P}$ je zobrazení z Plancherelovy věty.*
(e) *Je-li $\Lambda \in \mathscr{S}'$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$, pak*
$$\widehat{P(D)\Lambda} = \check{P} \cdot \widehat{\Lambda}, \quad \widehat{P \cdot \Lambda} = \check{P}(D)\widehat{\Lambda}.$$

Lemma 42. *Nechť $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

(a) *Je-li $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ v $\mathbb{R}^d$, pak $\tau_{\boldsymbol{x}_n}\varphi \to \tau_{\boldsymbol{x}}\varphi$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*
(b) *Nechť $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^d$. Pak $\partial_{\boldsymbol{e}}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Navíc, pokud pro $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definujeme funkci φ_r předpisem*
$$\varphi_r(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{r}(\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x} - r\boldsymbol{e})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$
tj. $\varphi_r = \frac{1}{r}(\varphi - \tau_{r\boldsymbol{e}}\varphi)$, pak $\varphi_r \to \partial_{\boldsymbol{e}}\varphi$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pro $r \to 0$.

Tvrzení 43. *Nechť $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ a $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$.*

(a) *Nechť $\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d_1})$. Pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d_2}$ definujme $\psi(\boldsymbol{y}) = \Lambda(\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$. Pak $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_2})$ a pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d_2}$ platí $D^\alpha\psi(\boldsymbol{y}) = \Lambda(\boldsymbol{x} \mapsto D^{(\boldsymbol{o},\alpha)}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d_2}$.*
(b) (Fubiniova věta pro temperované distribuce) *Nechť $\Lambda_1 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d_1})$ a $\Lambda_2 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d_2})$. Pak*
$$\Lambda_2(\boldsymbol{y} \mapsto \Lambda_1(\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))) = \Lambda_1(\boldsymbol{x} \mapsto \Lambda_2(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))).$$

Definice. Nechť U je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. **Konvolucí funkce** φ **a distribuce** U rozumíme funkci $U * \varphi$ definovanou vzorcem

$$U * \varphi(\boldsymbol{x}) = U(\tau_{\boldsymbol{x}}\check{\varphi}) = U(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Poznámka. Je-li $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak tato definice splývá s definicí konvoluce distribuce a testovací funkce z oddílu IV.5.

Věta 44 (o konvoluci temeperované distribuce a funkce ze Schwartzova prostoru). *Nechť $U \in \mathscr{S}'$, $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. Pak platí:*

(a) *$U * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a pro každý multiindex α platí $D^\alpha(U * \varphi) = (D^\alpha U) * \varphi = U * D^\alpha\varphi$.*
(b) *$\Lambda_{U*\varphi}$ je temperovaná distribuce.*
(c) *Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro nějaké $p \in [1, \infty]$, pak $\Lambda_f * \varphi = f * \varphi$.*
(d) *$\widehat{\Lambda_{U*\varphi}} = \widehat{\varphi} \cdot \widehat{U}$, $\widehat{\varphi \cdot U} = \Lambda_{\widehat{\varphi} * \widehat{U}}$.*
(e) *$U * (\varphi * \psi) = (U * \varphi) * \psi$.*